目 录

第 1 章　函　数

1.1　集合

函数是微积分的重要基本概念之一，是微积分的研究对象. 本章中，我们将介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，还有实际应用中的函数的建立方法，这都是我们进一步学习微积分的基础知识.

1.1.1　集合

1. 集合的概念

"集合"是数学中一个重要的概念，它在现代数学中起着非常重要的作用.

我们常常研究某些事物组成的集体，例如一班学生、一批产品、全体正整数等等，这些事物组成的集体都是集合(有时简称集).

一般说来，集合是具有某种属性的事物的全体，或是一些确定对象的汇总，构成集合的事物或对象，称为集合的元素.

下面举几个集合的例子：

例 1.1.1　2012 年 2 月 1 日在中国出生的人.

例 1.1.2　电视，冰箱，洗衣机.

例 1.1.3　全体偶数构成的集合.

例 1.1.4　直线 $x+y-1=0$ 上所有的点.

例 1.1.5　$x^2+x-2=0$ 的根构成的集合.

由有限个元素构成的集合，称为有限集合，如例 1、2、5；由无限多个元素构成的集合，称为无限集合，如例 3、4；不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

通常，我们用大写的字母 A、B、C…… 表示集合，用小写字母 a、b、c…… 表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中.

集合的表示法有列举法和描述法以及文氏图法.

按任意顺序列出集合的所有元素，并用$\{\}$括起来的集合表示法叫做列举法. 如集合 A 由元素 a,b,c,d 组成，可表示成 $A=\{a,b,c,d\}$. 这种表示法一般适用于有限集合可数无限集.

描述法是强调指出具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，通常表示成

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } P\},$$

例如不等式 $0 < 3x - 2 \leqslant 1$ 的解集 B 可表示为 $B = \{x \mid 0 < 3x - 2 \leqslant 1\}$.

集合以及集合间的关系可以用图形表示，称为文氏图. 文氏图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合内的元素以区域内的点表示.

2. 集合与集合间的关系

设 A,B 是两个集合，若集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$（读作 A 包含于 B）或者 $B \supset A$（读作 B 包含 A）. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$. 我们规定，空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，即 $\varnothing \subset A$.

如果集合的元素都是数，则称之为数集. 常见的数集有

(1) 全体非负整数组成的集合叫做非负整数集(或自然数集). 记作 $\mathbf{N}$.

(2) 所有正整数组成的集合叫做正整数集. 记作 $\mathbf{N}^+$.

(3) 全体整数组成的集合叫做整数集. 记作 $\mathbf{Z}$.

(4) 全体有理数组成的集合叫做有理数集. 记作 $\mathbf{Q}$.

(5) 全体实数组成的集合叫做实数集. 记作 $\mathbf{R}$.

3. 集合的运算

集合的基本运算有三种：交、并、差.

设 A,B 是两个集合，则集合

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\};$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\};$$
$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

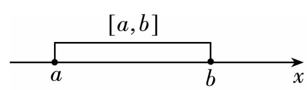
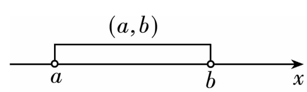
分别称为 A 与 B 的交集、并集、差集.

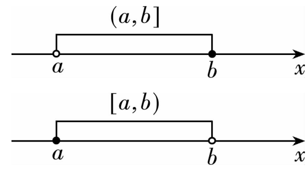
我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为全集，并用 Ω 表示，把差集 $\Omega \backslash A$ 称为 A 的余集或补集，记作 C_n^A.

1.1.2　区间和邻域

1. 区间

区间是常用的一类数集，可以分为有限区间和无限区间.

区间的名称	区间的满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a < x < b$	(a,b)	

半开区间	$a < x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x < b$	$(a,b]$ 或 $[a,b)$	

以上我们所述的都是有限区间,除此之外,还有无限区间:

$[a,+\infty)$:表示不小于 a 的实数的全体,也可记为:$a \leqslant x < +\infty$;

$(-\infty,b)$:表示小于 b 的实数的全体,也可记为:$-\infty < x < b$;

$(-\infty,+\infty)$:表示全体实数,也可记为:$-\infty < x < +\infty$

注意:其中 $-\infty$ 和 $+\infty$,分别读作“负无穷大”和“正无穷大”,它们不是数,仅仅是记号.

2.邻域

设 $a \in R, \delta > 0$,数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为 a 的 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 表示 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 中去掉 a 的集合,称为 a 的去心 δ 邻域,记作

$$\mathring{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

如果无须指明邻域的半径 δ 时,常把 a 的某邻域(或去心邻域)表示为 $U(a)$(或 $\mathring{U}(a)$).

习题 1.1

1.设 $A = \{1,2,3\}, B = \{1,3,5\}, C = \{2,4,6\}$,求:

(1)$A \cup B$;　(2)$A \cap B$;　(3)$A \cup B \cup C$;　(4)$A \cap B \cap C$;　(5)$A \setminus B$.

2.已知集合 $A = \{a,2,4,5\}, B = \{1,3,4,b\}$.若 $A \cap B = \{1,4,5\}$,求 a,b.

3.解下列不等式:

(1)$x^2 < 9$;　(2)$|x-4| < 7$;　(3)$0 < (x-2)^2 < 4$;

(4)$|ax - x_0| < \delta(a > 0, \delta > 0, x_0$ 为常数).

4.用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

(1)$I_1 = \{x \mid |x+3| < 2\}$;　(2)$I_2 = \{x \mid 1 < |x| \leqslant 3\}$.

1.2　函数

1.2.1　函数的概念

1.函数关系

函数关系是满足一定条件的一种关系.

在中学数学中学习过函数,其定义为:

设在某个变化过程中，有两个变量 x 与 y，如果对于 x 所考虑范围内的每一个数值，都有一个确定的数值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数.

现在我们用集合的语言给出函数关系的定义：

若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y = f(x), x \in D$.

x 称为自变量，y 称为因变量.

集合 D 称为函数的定义域，$f(D)$ 称为函数的值域.

定义域和对应规则是构成函数的两要素.

函数的表示方法有三种：列表法、图示法、解析法(公式法). 将解析法和图示法相结合来研究函数，可以将抽象问题具体化. 同时，一些几何问题也可以通过解析法来做理论研究.

2. 多值函数

在函数关系定义中要求对每一个 $x \in D$，都有一个确定的 y 值与之对应. 但我们也常常遇到另一种关系，例如 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$，对于每一个 $x \in (-5, 5)$，都有两个 y 值与之对应，这就不符合前面的函数定义了，按前面定义应该说它不是一个函数关系. 但为了方便，我们把对于非空集合 D 中的 x 值有多个 y 值与之对应的关系称为**多值函数**. 那么，前面函数定义中的函数关系可称为单值函数. 如果不做声明，本书中提到函数时均指单值函数.

例如：对于多值函数 $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$，可以把它分成两个单值函数 $y = \sqrt{25 - x^2}$ 与 $y = -\sqrt{25 - x^2}$.

3. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为“**分段函数**”.

例如：(1) $y = |x| = \begin{cases} x, x \geqslant 0, \\ -x, x < 0. \end{cases}$ 如图 1.2－1，

(2) 符号函数 $y = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0. \end{cases}$ 如图 1.2－2.

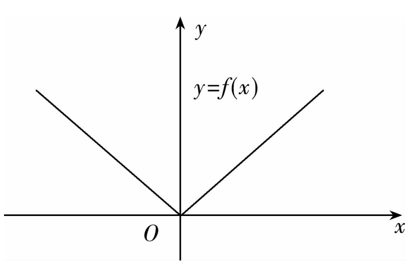


图 1.2－1

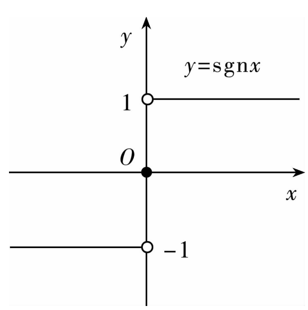


图 1.2－2

注意：分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数，在实际应用中常常用到这种表示形式.

4. 隐函数

有些函数它的因变量是用自变量表达式表达出来的，称为显函数. 例如 $y = x^2, y = \sqrt{r^2 - x^2}, y = \ln(3x+1)$ 等. 而有些函数，它的因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x, y) = 0$ 表示的，称为**隐函数**. 如 $Ax + By + C = 0, xy = 1, x^2 + y^2 = 4$ 等. 有些隐函数是可以化成显函数的，称为隐函数显化.

例 1.2.1　求函数 $y = \dfrac{1}{\ln(3x-2)}$ 的定义域.

解：函数的定义域是使函数有意义的自变量 x 的全体，即 $3x - 2 > 0$ 且 $3x - 2 \neq 1$，得到函数的定义域为 $D = \left(\dfrac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$.

1.2.2　函数的四个性质

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于所有 $x \in D$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

如果对于所有 $x \in D$，都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

例如，函数 $y = x^4 - 2x^2, y = \sqrt{1 - x^2}, y = \dfrac{\sin x}{x}$ 都是偶函数；函数 $y = \dfrac{1}{x}, y = x^3, y = x^2 \sin x$ 都是奇函数；$y = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数又不是偶函数，称为**非奇非偶函数**. 显然，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

例 1.2.2　判断函数 $y = x^4 + x^2 + 1$ 的奇偶性.

解：因为 $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 = f(x)$，

所以 $y = x^4 + x^2 + 1$ 为偶函数.

例 1.2.3　判断函数 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 的奇偶性.

解：因为 $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^x}{2} = -\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = -f(x)$，

所以 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ 为奇函数.

例 1.2.4　判断函数 $y = x^3 + 1$ 的奇偶性.

解：因为 $f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$，

既不等于 $f(x) = x^3 + 1$，也不等于 $-f(x) = -x^3 - 1$，所以 $y = x^3 + 1$ 为非奇非偶函数.

2. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 对区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称

此函数在区间(a,b)内是**单调增加的**或称**递增**,区间(a,b)称为函数的单调增加区间.当$x_1 < x_2$时,有$f(x_1) > f(x_2)$,则称此函数在区间(a,b)内是**单调减少的**或称**递减**,区间(a,b)称为函数的单调减少区间.

单调增加函数的图像是沿x轴正向逐渐上升的;单调减少函数的图像是沿x轴正向逐渐下降的.

例 1.2.5 判断函数$y = 2x^2 + 1$的单调性.

解:对任意x_1的x_2和,有

$$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1^2 + 1) - (2x_2^2 + 1) = 2(x_1^2 - x_2^2).$$

在$(-\infty,0]$内,若$x_1 < x_2$,则$x_1^2 > x_2^2$,于是$2(x_1^2 - x_2^2) > 0$,因此有$f(x_1) - f(x_2) > 0$,即$f(x_1) > f(x_2)$.所以函数单调减少.

在$[0,\infty)$内,若$x_1 < x_2$,则$x_1^2 < x_2^2$,于是$2(x_1^2 - x_2^2) < 0$,因此有$f(x_1) - f(x_2) < 0$,即$f(x_1) < f(x_2)$.所以函数单调增加.

而在$(-\infty,+\infty)$内,函数不是单调函数.

3.函数的有界性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义((a,b)可以是函数$f(x)$的整个定义域,也可以是定义域的一部分).如果存在一个正数M,对于所有的$x \in (a,b)$,恒有$|f(x)| \leqslant M$,则称函数$f(x)$在(a,b)内是有界的.如果不存在这样的正数M,则称函数$f(x)$在(a,b)内是无界的.

例如,函数$y = \sin x$在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为对于任何实数x,恒有$|\sin x| \leqslant 1$.函数$y = \dfrac{1}{x}$在$(0,2)$上是无界的,在$[1,+\infty)$上是有界的.

4.函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D,若存在正数T,使得对于任意的$x \in D$,有$x \pm T \in D$,且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称$f(x)$为**周期函数**,T称为$f(x)$的一个周期.满足上式的最小正数T,称为函数$f(x)$的最小周期.$y = \sin x$就是周期函数,周期为2π.

1.2.3 反函数

设函数$y = f(x)$的定义域为D,值域为Z.如果对于每一个$y \in Z$有一个确定的且满足$y = f(x)$的$x \in D$与之对应,其对应规则记作f^{-1},这个定义在Z上的函数$x = f^{-1}(y)$称为$y = f(x)$的**反函数**,或称它们互为反函数.

习惯上,常以x表示自变量,y表示因变量.于是反函数又记为$y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$与$y = f^{-1}(x)$的关系是x与y互换,所以它们的图像是关于直线$y = x$对称的.如图1.2-3.

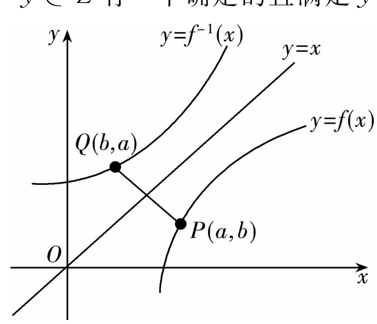


图 1.2-3

例 1.2.6 求$y = 3x - 1$的反函数.

解：由 $y=f(x)=3x-1$ 可以求出 $x=f^{-1}(y)=\dfrac{y+1}{3}$，将上式中的 x 换成 y，y 换成 x，因此得出 $y=3x-1$ 的反函数是 $y=\dfrac{x+1}{3}$.

一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系.

例如，在 $(-\infty,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，所以它没有反函数；而在 $(-\infty,0)$ 内，$y=x^2$ 有反函数 $y=-\sqrt{x}$；在 $(0,+\infty)$ 内，$y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$.

1.2.4 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，若函数 $u=g(x)$ 的值域为 Z_g，若 $D_f\cap Z_g$ 非空，则称函数 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**，其中 u 为中间变量.

若 $D_f\cap Z_g$ 为空集，则 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 两者不能进行复合运算. 例如 $f(u)=\arccos u$，$u=g(x)=2+x^2$，由于 $D_f\cap Z_g=[-1,1]\cap[2,+\infty)=\varnothing$，所以这两个函数不能进行复合运算.

利用复合函数的概念，可以将一个较复杂的函数看成由几个简单函数复合而成，这样更便于对函数进行研究. 例如，函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$ 可以看成是由 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 三个函数复合而成.

习题 1.2

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$；　(2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　(3) $y=\dfrac{-5}{x^2+4}$；

(4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　(5) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

2. $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$ 是不是相同的函数关系？为什么？

3. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(-x)$，$f(\dfrac{1}{x})$，$f(x+1)$.

4. 若 $f(x)=\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$，证明 $f(-x)=-f(x)$.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\tan x$；　(2) $y=2+3\cos x$；　(3) $y=xe^x$；　(4) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

6. 求函数 $y=1+\ln(x+2)$ 的反函数.

7. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\arcsin\sqrt{\tan x}$；　(2) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　(3) $y=\ln^2\arccos x^4$.

1.3 基本初等函数与初等函数

1.3.1 基本初等函数

基本初等函数包括常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

1. 常函数　$y=C$（C 是常数）

定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\{C\}$，图形为平行于 x 轴截距为 C 的直线.

2. 幂函数　$y=x^a$（a 为任意实数）

它的定义域取决于a. 但不论a为何值，$y=x^a$ 在$(0,+\infty)$上总有定义，而且图形都经过(1，1)点. $a>0$ 和 $a<0$ 时的图象分别如图 1.3－1 和图 1.3－2.

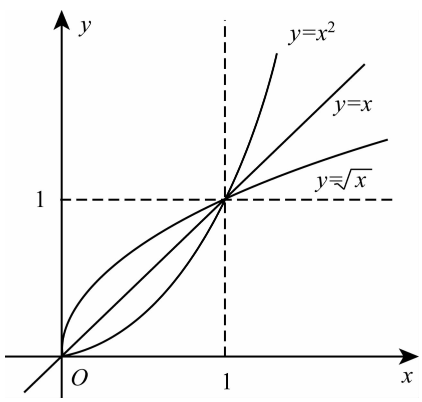


图 1.3－1

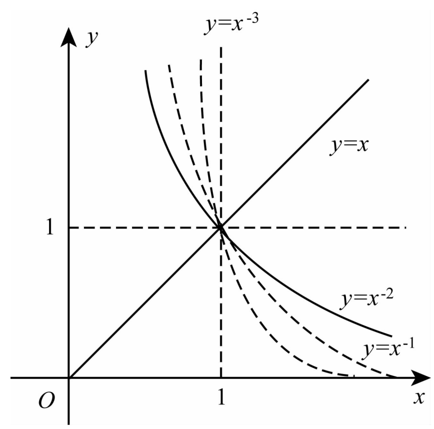


图 1.3－2

3. 指数函数　$y=a^x$（$a>0,a\neq 1$）

定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$，都通过(0,1)点，当 $a>1$ 时，函数单调增加，当 $0<a<1$ 时，函数单调减少，如图 1.3－3.

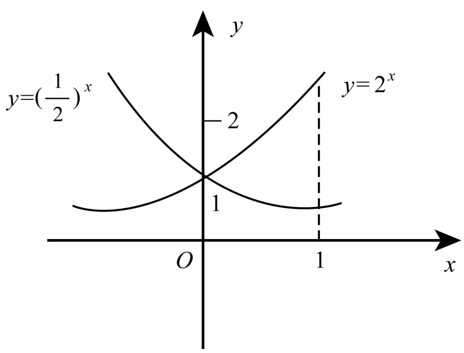


图 1.3－3

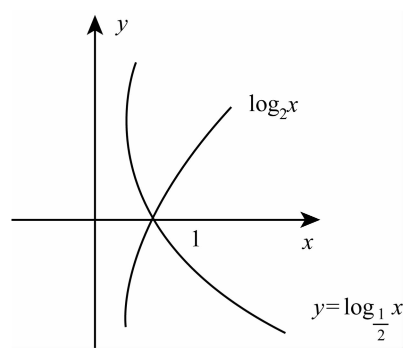


图 1.3－4

4. 对数函数　$y = \log_a x(a > 0, a \neq 1)$

定义域为$(0, +\infty)$，都通过$(1,0)$点，当$a > 1$时，函数单调增加，当$0 < a < 1$时，函数单调减少，如图 1.3－4. 对数函数与指数函数互为反函数.

5. 三角函数

三角函数有 $y = \sin x, y = \cos x, y = \cot x, y = \tan x, y = \sec x, y = \csc x$.

(1) 正弦函数 $y = \sin x$ 的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-1,1]$，在$[2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}]$上单调增加，在$[2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2}]$上单调减少$(k \in Z)$，周期为 2π，奇函数. 如图 1.3－5.

(2) 余弦函数 $y = \cos x$ 的定义域、值域和周期与正弦函数相同. 在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上单调增加，在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$上单调减少$(k \in Z)$，偶函数.

(3) 正切函数 $y = \tan x$ 的定义域为$(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})(k \in Z)$，值域为$(-\infty, +\infty)$，在定义区间上单调增加，周期为 π，奇函数. 如图 1.3－6.

(4) 余切函数 $y = \cot x$ 的定义域为$(k\pi, (k+1)\pi)(k \in Z)$，值域为$(-\infty, +\infty)$，在定义区间上单调减少，周期为 π，奇函数.

(5) 在微积分中还会用到正割函数和余割函数，它们的记号和定义分别为

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

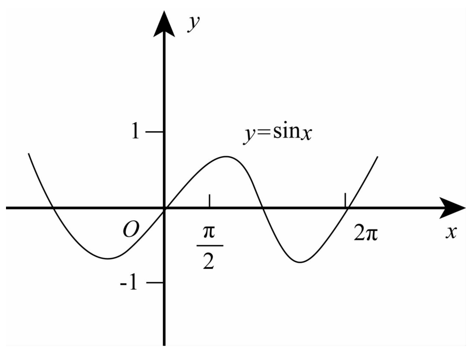


图 1.3－5

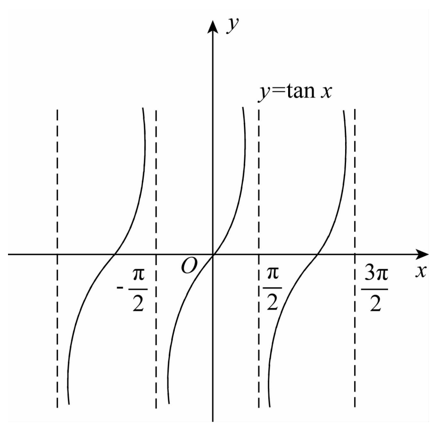


图 1.3－6

为方便大家学习，下面给出一些微积分中常用的三角公式：

分公式　$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}$;

平方和公式　$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$;

和差化积公式　$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$,

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2};$$

倍角公式 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$，

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$，

$\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$；

半角公式 $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

6. 反三角函数

反三角函数有 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\text{arccot}\,x$.

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 如图 1.3－7.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$. 如图 1.3－8.

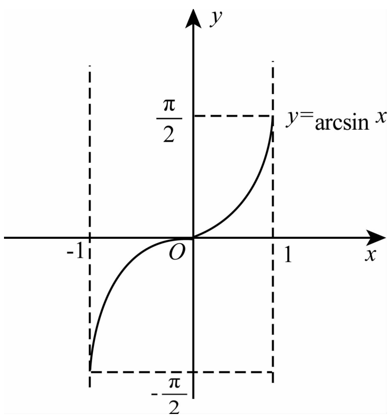


图 1.3－7

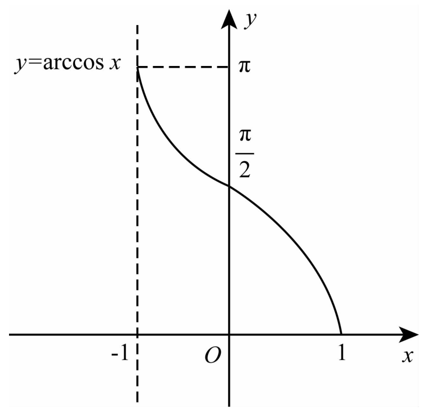


图 1.3－8

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 如图 1.3－9.

(4) 反余切函数 $y=\text{arccot}\,x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$. 如图 1.3－10.

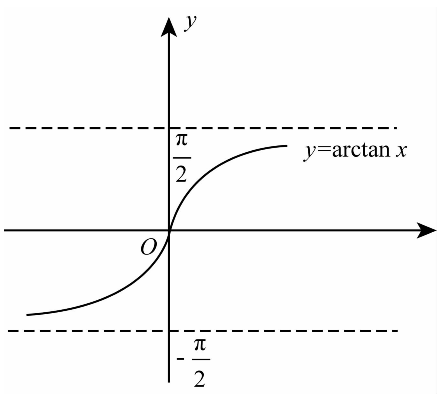


图 1.3－9

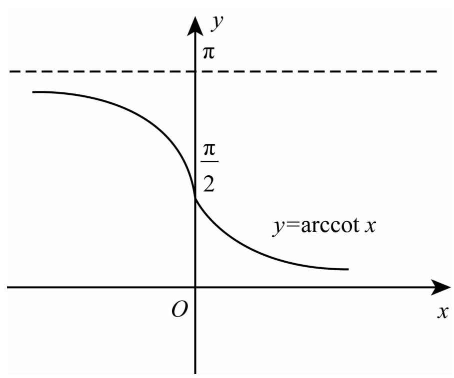


图 1.3－10

1.3.2　初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合并能用一个式子表示的函数称为初等函数.例如,$y=x^2+4x-3$,$y=\sqrt{\sin[1+\ln^2(2x+1)]}$ 等都是初等函数.

特别指出,不能认为所有的分段函数都不是初等函数.

例如,$y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 就是初等函数,因为 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}=|x|=\sqrt{x^2}$,可看成由 $y=\sqrt{u}$,$u=x^2$ 复合而成.

习题 1.3

1. 将下列函数分解成基本初等函数或初等函数经过四则运算而成的形式：

(1)$y=\arccos\dfrac{3x+1}{4}$；　　(2)$y=e^{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{-2}}$.

2. 验证函数 $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调增加.

3. 求函数 $y=\cos 3x$ 的周期.

1.4　经济学中常用函数

对需求、价格、成本、收益、利润等经济量的关系研究,是经济数学最重要的任务之一,由于现实问题中所涉及的变量较多,其间的关系也错综复杂,我们这里只局限于研究两个变量间的依赖关系.

1.4.1　需求函数与供给函数

1. 需求函数

在经济学中如果把除了该商品价格以外的影响需求量的因素都看做是不变的因素,那么需求量 Q 就是该商品价格 P 的函数,称为**需求函数**.记作 $Q=f(P)$.需求函数一般是价格的单调减少函数.

常用下面这些简单的初等函数来表示需求函数：

线性函数　$Q=-aP+b$,其中 $a>0$；

幂函数　$Q=kP^{-a}$,其中 $k,a>0$；

指数函数　$Q=ae^{-bP}$,其中 $a,b>0$.

2. 供给函数

供给必须具备两个条件:一是有出售商品的愿望,二是有供应商品的能力,二者缺一不可.

在其他因素不变的条件下,供应商品的价格 P 与相应的供给量 S 之间有着函数关系,即供

给量 S 是商品的价格 P 的函数，称为供给函数. 记作 $S = f(P)$. 供给函数一般是价格的单调增加函数.

常用下面这些简单的初等函数来表示供给函数：

线性函数　$S = aP + b$，其中 $a > 0$；

幂函数　$S = kP^a$，其中 $k, a > 0$；

指数函数　$S = ae^{bP}$，其中 $a, b > 0$.

3. 均衡价格

在经济领域中，所谓市场均衡价格是指市场上对某种商品而言，需求量与供给量相等时的价格 P_e。当市场价格 $P > P_e$ 时，供过于求；当市场价格 $P < P_e$ 时，供不应求. 市场均衡数量是指均衡价格下的需求量与供给量.

例 1.4.1　某商品的需求函数为 $Q = 100 - 3P$，供给函数为 $S = -50 + 2P$，试求该商品的市场均衡价格和均衡数量.

解：由均衡条件 $Q = S$，得到 $100 - 3P = -50 + 2P$.

解得 $P_e = 30$ 为均衡价格. 而此时的均衡数量 $Q_0 = 100 - 3P_e = 10$.

1.4.2　成本函数、收益函数与利润函数

任何一项生产活动中人们所关心的问题是产品的成本、销售的收益和获得的利润，通常把成本、收益和利润称为经济变量. 而成本 C、收益 R 和利润 L 都与产品的产量或销售量密切相关，它们都可以看成 x 的函数，分别称为总成本函数，记为 $C(x)$；总收益函数，记为 $R(x)$；总利润函数，记为 $L(x)$.

总成本 = 固定成本 + 可变成本. 其中固定成本与产量 x 无关，如厂房费用、设备维修费、行政管理费等；可变成本随产量 x 增加而增加，如原材料费用、燃料费用等.

如果 a 为固定成本，b 为单位可变成本，生产量为 x，则总成本函数为 $C(x) = a + bx$；

平均单位成本函数为 $\overline{C(x)} = \dfrac{C(x)}{x}$.

如果产品的销售单价为 P，销售量为 x，则总收益函数为 $R(x) = Px$.

总利润函数 = 总收益 − 总成本，即 $L(x) = R(x) - C(x)$.

所谓**保本点**(盈亏临界点) 是指企业处于盈亏平衡状态下(即利润为零) 的销售量(或产量)x_0.

例 1.4.2　某商品的成本函数(单位：元) 为 $C(x) = 81 + 3x$，其中 x 为该商品的数量. 问：(1) 如果商品的售价为 12 元 / 件，该商品的保本点是多少?(2) 售价为 12 元 / 件时，售出 10 件商品时的利润是多少?(3) 该商品的售价为什么不应定为 2 元 / 件?

解：(1) 由 $C = R$，$R = 12x$，得到 $81 + 3x = 12x$，保本点为 $x = 9$；

(2)$L(x) = R - C = 12x - (81 + 3x) = 9x - 81$，所以 $L(10) = 9$(元)；

(3) 若该商品的售价定为 2 元 / 件，由 $C = R$，得到 $81 + 3x = 2x$，保本点为 $x = -81$，所以该商品的售价不应定为 2 元 / 件.

1.4.3　利率

利息是指货币随时间的推移所形成的增值.下面介绍两种简单的计息方式:单利和复利.

单利是指只有本金生息,利息不再生息的计息方式;而复利是指本金和利息都生息的一种计息方式.

假设初始本金为 P,银行存款年利率为 r.

按单利计算,t 年后本利和 S 为

$$S = P + Ptr = P(1 + rt).$$

按复利计算:(1) 若每年计息一次,则 t 年后本利和 S 为 $S = P(1+r)^t$;

(2) 若每年计息 n 次,则 t 年后本利和 S 为 $S = P(1+\frac{r}{n})^{tn}$.

例 1.4.3　现有初始本金 100 元,若银行储蓄利率为 7%,问:(1) 按单利计算,3 年末的本利和为多少?(2) 按复利计算,3 年末的本利和为多少?

解:S 表示本利和,P 表示初始本金,r 表示银行利率,t 表示年限,则

(1) 按单利计算,$S = P(1+rt) = 100 \times (1 + 0.07 \times 3) = 121$(元);

(2) 按复利计算,$S = P(1+r)^t = 100 \times (1 + 0.07)^3 = 122.504$(元).

习题 1.4

1. 设某商品的需求函数为 $Q = 1000 - 5P$,试求该商品的收益函数 $R(Q)$,并求销量为 200 件时的总收入.

2. 设生产某种商品 Q 件时的总成本为 $C(Q) = 20 + 2Q + 0.5Q^2$(万元),若每售出一件该商品的收入是 20 万元,求生产 20 件时的总利润和平均利润.

3. 要设计一个容积为 V 的长方体水池,设它的底为正方形,如果池底所用材料单位面积的造价是四周单位面积造价的 2 倍,试将总造价表示成底边长的函数.

总复习题一

1. 填空题:

(1) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} + \arcsin\frac{2x+1}{3}$ 的定义域是__________;

(2) 设 $f(x) = \frac{x}{1-x}$,则 $f[f(x)] = $ __________;

(3) 若 $f(x-1) = x(x-1)$,则 $f(x) = $ __________;

(4) 函数 $y = x + \sin x$ 的奇偶性是__________;

(5) 将函数 $y = 5 - |2x - 1|$ 用分段函数形式表示为__________.

2. 选择题:

(1) 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数的是(　　).

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=x$

C. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$　　D. $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln|x|$

(2) 若 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 那么 $f[f(x)]=$(　　).

A. $f(x), x\in(-\infty,+\infty)$　　B. $1, x\in(-\infty,+\infty)$

C. $0, x\in(-\infty,+\infty)$　　D. 不存在

(3) 函数 $y=|\sin x|$ 的周期是(　　).

A. 4π　　B. 2π

C. π　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(4) 函数 $y=\lg(x-1)$ 在区间(　　)内有界.

A. $(1,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

(5) 函数 $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 单调增加函数　　D. 单调减少函数

3. 判断函数 $y=1-3x^2$ 的奇偶性,单调增减性.

4. 下列函数可以看成是由哪些简单函数复合而成:

(1) $y=2^{\sin^2\frac{1}{x}}$　　(2) $y=\arctan[\tan^2(1+x^2)]$

5. 已知生产和销售某种商品 Q(台)时的成本函数和收入函数分别为

$$C=10-8Q+Q^2, R=4Q\ (\text{单位:万元}).$$

(1) 求该商品的利润函数及销售量为 6 台时的总利润;

(2) 确定该商品销售量为 7 台时,是否赢利?