



目 录

第一章 实数与函数	(1)
第一节 实 数	(1)
第二节 数集及其确界	(2)
第三节 函数的概念	(6)
第二章 极限	(15)
第一节 数列的极限	(15)
第二节 函数的极限	(23)
第三节 两个重要的极限	(32)
第四节 无穷小量与无穷大量	(34)
第三章 函数的连续性	(41)
第一节 连续性的概念	(41)
第二节 连续函数的性质	(44)
第三节 初等函数的连续性	(47)
第四章 导数与微分	(51)
第一节 导数的概念	(51)
第二节 求导法则	(56)
第三节 高阶导数	(62)
第四节 微分及其应用	(65)
第五章 微分中值定理及其应用	(72)
第一节 罗尔定理与拉格朗日定理	(72)
第二节 柯西中值定理和洛比达法则	(76)
第三节 泰勒公式	(83)
第四节 函数的极值与最值	(90)
第五节 函数的凸(凹)性、拐点以及函数作图	(94)
第六章 不定积分	(102)
第一节 不定积分的概念	(102)
第二节 换元积分法与分部积分法	(106)
第三节 有理函数的积分法	(114)
第四节 可化为有理函数的积分法	(117)



第七章 定积分	(123)
第一节 定积分的概念	(123)
第二节 定积分的基本公式	(130)
第三节 可积条件	(137)
第四节 定积分的性质	(142)
第八章 定积分的应用	(147)
第一节 平面图形的面积	(147)
第二节 平面曲线的弧长	(150)
第三节 旋转体的体积和侧面积	(153)
第四节 定积分在物理中的某些应用	(155)
第九章 反常积分	(161)
第一节 无穷积分的性质与敛散性的判别	(161)
第二节 瑕积分的性质与敛散性的判别	(169)
第十章 数项级数	(174)
第一节 数项级数的敛散性	(174)
第二节 同号级数	(179)
第三节 一般项级数	(186)
第十一章 函数列与函数项级数	(194)
第一节 收敛概念	(194)
第二节 一致收敛的判别法	(198)
第三节 一致收敛函数列与函数项级数的性质	(203)
第十二章 幂级数	(209)
第一节 幂级数的性质	(209)
第二节 函数的幂级数展开	(214)
第十三章 傅里叶级数	(220)
第一节 傅立叶级数	(220)
第二节 以 $2l$ 为周期的函数的展开式	(227)
第三节 收敛定理的证明	(232)
第十四章 多元函数的极限与连续	(238)
第一节 平面点集与多元函数	(238)
第二节 二元函数的极限	(245)
第三节 二元函数的连续性	(250)
第十五章 多元函数微分学	(254)
第一节 偏导数和全微分	(254)
第二节 链式法则	(262)
第三节 方向导数和梯度	(267)



第四节 泰勒公式	(271)
第五节 极值	(274)
第十六章 隐函数定理及其应用	(282)
第一节 隐函数	(282)
第二节 隐函数组	(287)
第三节 几何应用	(293)
第四节 条件极值	(295)
第十七章 重积分	(300)
第一节 二重积分的概念与性质	(300)
第二节 二重积分的计算	(302)
第三节 三重积分	(305)
第四节 重积分的应用	(308)
第十八章 含参量积分	(315)
第一节 含参量正常积分	(315)
第二节 参量反常积分	(320)
第三节 欧拉积分	(326)
第十九章 曲线积分与曲面积分	(331)
第一节 第一型曲线积分与第一型曲面积分	(331)
第二节 第二型曲线积分	(336)
第三节 格林公式. 曲线积分与路线的无关性	(341)
第四节 第二型曲面积分	(347)
第五节 高斯公式和斯托克斯公式	(351)
参考答案	(360)



第一章 实数与函数



第一节 实数

数学分析是讲述函数理论的最基本的课程,是几乎所有后继数学课程的奠基石,而数学分析关于函数的研究都是定义在实数集上的,因此,我们将先叙述实数的有关概念.

一、实数及其性质

在中学数学课程中,我们已经知道实数由有理数和无理数两大部分构成.每一个有理数既可以用分数 $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0, p, q$ 为整数) 来表示,也可以用无限十进循环小数或有限十进小数(可看成是从某位开始全为零的无限循环小数)来表示,而不能表示成分数 $\frac{p}{q}$ 的实数称为无理数.

实数主要有以下一些性质:

1. 封闭性:任意两个实数在经过加、减、乘、除(除数不为0)运算后,所得的和、差、积、商仍然是实数.
2. 有序性:任意两个实数 a, b 必定满足下列三个关系之一: $a > b, a < b, a = b$.
3. 稠密性:任意两个不相等的实数之间必会存在一个实数,并且既有有理数,也有无理数.
4. 阿基米德(Archimedes)性:对任何两个实数 a, b , 如果 $a > b > 0$, 则存在正整数 n , 使得 $nb > a$.
5. 传递性:对任意三个实数 a, b, c , 若 $a < b, b < c$, 则 $a < c$.

为方便起见,我们通常用 R 来表示实数,即 $R = \{x \mid x \text{ 为实数}\}$.

数轴是表示实数的一种几何方法,任一实数都与数轴上唯一一点形成对应,同样地,数轴上的每一点也唯一地对应着一个实数.正是由于所有实数与整个数轴上的点有着这样的一一对应关系,故在以后的描述中,对“实数 a ”与“数轴上的点 a ”不加以区别,视为具有相同的含义.

二、绝对值与不等式

从数轴上看,实数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离.数学中对实数 a 的绝对值是这样定义的:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

绝对值有以下性质:

1. $|a| = |-a| \geq 0$, 当且仅当 $a = 0$ 时等号成立;
2. 对任何实数 a , 总有 $-|a| \leq a \leq |a|$;



3. 对于两实数 a 和 b , $|ab| = |a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, ($b \neq 0$);

4. 当 $h \geq 0$ 时, $|a| \geq h \Leftrightarrow a \geq h$ 或 $a \leq -h$;

$$|a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h;$$

5. 对于任何实数 a, b 有

$$|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$$

我们称该不等式为三角形不等式.

下面只给出性质 5 的证明, 其它性质的证明由读者自行完成.

证明 由性质 2 可知

$$-|a| \leq a \leq |a|;$$

$$-|b| \leq b \leq |b|$$

由同向不等式的相加法则得到

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

再由性质 4, 上式等价于

$$|a + b| \leq |a| + |b| \tag{1}$$

若将(1)式中 b 改为 $-b$, 不等式仍然成立, 即证明了右边的不等式.

又因为 $|a| = |a - b + b|$, 根据(1)式有

$$|a| \leq |a - b| + |b|$$

所以

$$|a| - |b| \leq |a - b| \tag{2}$$

将(2)中 b 改为 $-b$, 即证明了左边的不等式.

除了三角形不等式, 我们经常还会用到以下两个不等式:

1. 平均值不等式 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为 n 个正实数, 则

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

其中 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ 和 $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ 分别称为 n 个正实数的几何平均数与算术平均数.

2. 伯努利不等式 设 $h > -1$, n 为自然数, 则有

$$(1 + h)^n \geq 1 + nh$$

此不等式可用中学数学中的数学归纳法加以证明.

第二节 数集及其确界

本节将为大家介绍实数集 R 上的两类重要的数集——区间与邻域, 然后讨论有界集, 并给出作为极限的理论基础的确界定理.

一、区间与邻域

设 $a, b \in R$ 且 $a < b$, 我们规定:



- (1) 满足 $\{x \mid a < x < b, x \in R\}$ 的数集为开区间, 记作 (a, b) ;
- (2) 满足 $\{x \mid a \leq x \leq b, x \in R\}$ 的数集为闭区间, 记作 $[a, b]$;
- (3) 满足 $\{x \mid a \leq x < b, x \in R\}$ 的数集为左闭右开区间, 记作 $[a, b)$;
- (4) 满足 $\{x \mid a < x \leq b, x \in R\}$ 的数集为左开右闭区间, 记作 $(a, b]$;

其中 $[a, b)$ 和 $(a, b]$ 统称半开半闭区间.

另外, 我们用区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示实数集 R , 其中“ ∞ ”读作“无穷大”. 这样一来, 我们就可以用“ $+\infty$ ”和“ $-\infty$ ”表示以下的一些数集. 如

$$\begin{aligned}\{x \mid x \geq a\} &= [a, +\infty), \\ \{x \mid x \leq a\} &= (-\infty, a], \\ \{x \mid x > a\} &= (a, +\infty), \\ \{x \mid x < a\} &= (-\infty, a).\end{aligned}$$

注意: “ ∞ ”所在端点均为开区间.

若 $a \in R, \delta > 0$, 我们把满足 $|x - a| < \delta$ 的所有实数称为点 a 的 δ 邻域, 记作

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

当不需要注明邻域半径 δ 时, 通常是对某个确定的邻域半径 δ , 常将它表示为 $U(a)$, 简称 a 的邻域.

当数集中不包含点 a 时, 我们将满足 $0 < |x - a| < \delta$ 的全体实数称为点 a 的 δ 去心邻域, 记作

$$U^{\circ}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta) - \{a\}.$$

同样地, 当不需要注明邻域半径 δ 时, 常将它写作 $U^{\circ}(a)$, 简称 a 的去心邻域.

另外, 还有下面几种邻域的概念及符号表示, 供大家参考:

- (1) 点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a, \delta) = \{x \mid 0 \leq x - a < \delta\} = [a, a + \delta)$, 简记为 $U_+(a)$;
- (2) 点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a, \delta) = \{x \mid -\delta < x - a \leq 0\} = (a - \delta, a]$, 简记为 $U_-(a)$;
- (3) 点 a 的 δ 去心右邻域

$$U_+^{\circ}(a, \delta) = (a, a + \delta), \text{ 简记为 } U_+^{\circ}(a);$$

- (4) 点 a 的 δ 去心左邻域

$$U_-^{\circ}(a, \delta) = (a - \delta, a), \text{ 简记为 } U_-^{\circ}(a).$$

当 M 为充分大的正数时, 数集

$$\begin{aligned}U(\infty) &= \{x \mid x > M\}, & U(+\infty) &= \{x \mid x > M\}, \\ U(-\infty) &= \{x \mid x < -M\},\end{aligned}$$

分别称为 ∞ 邻域、 $+\infty$ 邻域、 $-\infty$ 邻域.

二、有界集及其确界

在讲述概念之前, 首先为大家介绍几个量词符号:

- (1) 符号“ \forall ”表示“任意”或“任意一个”, 它被认为是将英文字母 A 倒过来;
- (2) 符号“ \exists ”表示“存在”或“能找到”, 它被认为是将英文字母 E 反过来.

应用这两个符号表述定义和定理既简练又明确.

定义 1-1 设 E 是一个非空数集, 若 $M \in R$, 使得对 $\forall x \in E$, 有 $x \leq M$, 则称 M 为 E 的



一个上界;若 $L \in R$, 使得对 $\forall x \in E$, 有 $x \geq L$, 则称 L 为 E 的一个下界.

显然,任何大(小)于 $M(L)$ 的数,也都是 E 的上(下)界. 当数集 E 既有上界又有下界时,称 E 为有界集,即

$$E \text{ 为有界集} \Leftrightarrow \exists X > 0, \text{ 使得对 } \forall x \in E \text{ 有 } |x| \leq X,$$

反之,若 E 不是有界集,则称它为无界集.

例 1 证明 R^+ 无上界, $[0, 1]$ 有界.

证明 因为对任意的 $x \in [0, 1]$, 有 $0 \leq x \leq 1$, 故 $[0, 1]$ 是有界的. 而对任意 $M > 0$, 存在 $M+1 \in R^+$, $M+1 > M$, 故任意 $M > 0$ 都不是 R 的上界, 所以 R^+ 无上界.

由定义不难看出,若一个数集有上界,则它必定有无穷多个上界,而在这无穷多个上界中,最受人们关注的是这些上界中最小的上界,我们称之为数集的上确界. 类似的,我们把有下界的数集的最大下界,称之为该数集的下确界. 下面给出它们的精确定义:

定义 1-2 设 E 是非空数集,若 $\exists \alpha \in R$, 且满足

- (1) $\forall x \in E$, 有 $x \leq \alpha$,
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 有 $\alpha - \varepsilon < x_0$,

则称 α 是数集 E 的上确界,记作

$$\alpha = \sup E^{\text{①}}$$

不难看出:(1)表明 α 是数集 E 的上界;(2)表明任何小于 α 的数 $\alpha - \varepsilon$ 都不是数集 E 的上界,即数集 E 的上确界 α 是数集 E 的最小的上界. 类似地有:

定义 1-3 设 E 是非空数集,若 $\exists \beta \in R$, 且满足

- (1) $\forall x \in E$, 有 $x \geq \beta$,
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E$, 有 $x_0 < \beta + \varepsilon$,

则称 β 是数集 E 的下确界,记作

$$\beta = \inf E^{\text{②}}$$

同样地:(1)表明 β 是数集 E 的下界;(2)表明任何大于 β 的数 $\beta + \varepsilon$ 都不是 E 的下界,即数集 E 的下确界 β 是数集 E 的最大的下界.

例 2 证明 $\sup \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N_+ \right\} = 1, \inf \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N_+ \right\} = \frac{1}{2}$.

事实上,(1) $\forall n \in N_+$, 有 $\frac{n}{n+1} < 1$;

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = 1, \text{ 有 } 1 - \varepsilon < \frac{n_0}{1 + n_0} \text{ (只须 } n_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \text{ 即可),}$$

即
$$\sup \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in N_+ \right\} = 1.$$

又因为 (1) $\forall n \in N_+$, 有 $\frac{1}{2} \leq \frac{n}{n+1}$;

① “sup”是 supremum(上确界)的缩写

② “inf”是 infimum(下确界)的缩写



(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = 1$, 有 $\frac{n_0}{n_0+1} = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$, 即

$$\inf\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in N_+\right\} = \frac{1}{2}.$$

例 3 证明 $\sup\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6, \inf\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 1$.

事实上, (1) $\forall m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 有 $m \leq 6$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists 6 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 有 $6 - \varepsilon < 6$, 即

$$\sup\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6.$$

又因为(1) $\forall n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 有 $1 \leq n$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists 1 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 有 $1 < 1 + \varepsilon$, 即

$$\inf\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 1.$$

例 4 证明 $\sup(-\infty, a] = a, \inf(b, +\infty) = b$.

事实上, (1) $\forall x \in (-\infty, a]$, 有 $x \leq a$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (-\infty, a]$, 有 $a - \varepsilon < x_0$, 即

$$\sup(-\infty, a] = a.$$

又因为(1) $\forall x \in (b, +\infty)$, 有 $b < x$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in (b, +\infty)$, 有 $x_0 < b + \varepsilon$, 即

$$\inf(b, +\infty) = b.$$

由上面一些例子, 我们容易看出:

(1) 有限数集必定存在上下确界, 它的上下确界分别为该有限数集的最大数和最小数.

(2) 若数集 E 有上下确界, 则它的上下确界可能属于 E (如 $\sup(-\infty, b] = b$), 也可能不属于

于 E (如 $\sup\left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in N_+\right\} = 1$).

显然, 无上(下)界的数集一定不存在上(下)确界, 那么有上(下)界的数集是否一定存在上(下)确界呢?

关于数集确界的存在性问题, 本书给出如下定理:

确界定理 若非空数集 E 有上(下)界, 则数集 E 必存在上(下)确界.

这个定理虽然只是一个存在性的论断, 但却是本书的理论基础. 因此, 我们要对其加以高度的重视.

例 5 设 A, B 为非空有界数集, $S = A \cup B$, 证明:

(1) $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(2) $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证明 因为 A, B 非空有界, 所以 S 非空有界. 根据确界定理, S 的上下确界都存在.

一方面, $\forall x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 于是 $x \leq \sup A$ 或 $x \leq \sup B$, 从而 $x \leq \max\{\sup A, \sup B\}$, 即 $\sup S \leq \max\{\sup A, \sup B\}$;

另一方面, $\forall x \in A$, 有 $x \in S$, 于是 $x \leq \sup S$, 从而 $\sup A \leq \sup S$. 同理 $\sup B \leq \sup S$.

所以有

$$\sup S \geq \max\{\sup A, \sup B\};$$

综上所述有 $\sup S = \max\{\sup A, \sup B\}$.



(2) 同法可证.

注意 若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中, 并规定任一实数 a 与 $+\infty, -\infty$ 的关系如下:

$$a < +\infty, a > -\infty, -\infty < +\infty,$$

那么我们可以将确界定义加以推广:

若数集 S 无上界, 则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界, 记作

$$\sup S = +\infty.$$

若数集 S 无下界, 则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界, 记作

$$\inf S = -\infty.$$

在这样的定义下, 我们同样可以将确定定理加以扩充:

任一非空数集必有上(下)确界(正常的或非正常的).

如: 自然数集 N 仅有下确界, 但没有上确界, 可以表示为

$$\inf N = 1, \sup N = +\infty.$$

第三节 函数的概念

关于函数的概念, 在中学数学中我们已有了初步的了解, 本节将对此再作进一步的讨论.

一、函数的定义

定义 1-4 设 A 是非空数集, 若存在对应关系 f , 对 A 中任意数 $x (\forall x \in A)$, 按照对应关系 f , 对应唯一的一个 $y \in R$, 则称 f 是定义在 A 上的函数, 表示为 $f: A \rightarrow R$. 其中数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值, 表示为 $y = f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量. 数集 A 称为函数 f 的定义域, 函数值的集合 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ 称为函数 f 的值域.

关于函数的定义, 我们需要做以下几点说明:

1. 函数的定义域和对应法则是确定函数的两个主要因素, 所以我们常用 $y = f(x), x \in A$ 表示一个函数. 并且我们说两个函数相同, 是指它们具有相同的定义域和对应法则. 如函数 $f(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $g(x) = \frac{x}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 由于定义域不同, 所以它们是两个不同的函数.

2. 根据函数的定义, 虽然函数都存在定义域, 但是常常并不明确指出函数的定义域, 这时认为函数的定义域是自明的, 即定义域是使得函数 $y = f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A = \{x \mid f(x) \in R\}$. 对于具有实际意义的函数, 它的定义域则要受实际意义的约束. 如球的体积 V 是半径 r 的函数 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 其中 $r \in [0, +\infty)$.

3. 在函数定义中, 对每一个 x , 只能有唯一的 y 值与它对应, 这种函数称为单值函数. 若允许同一个 x 值可以和多于一个的 y 值相对应, 则称为多值函数. 但在本书范围内, 我们只讨论单值函数.



二、函数的表示法

在中学数学里,我们已经知道函数可以用三种方法来表示:解析法、列表法、图象法.

此外,有些函数在其定义域的不同部分用不同的解析式来表达,这样的函数我们将其称为分段函数.例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

的含义如下:当 x 在 $(0, +\infty)$ 内取值,对应的函数值等于 1;当 $x = 0$ 时,则 $f(0) = 0$;当 $x \in (-\infty, 0)$ 时,则 $f(x) = -1$. 我们将这样的函数称为符号函数,记作 $\operatorname{sgn}x$.

在以后的学习中,我们陆续还会碰到一些函数,它们无法用解析法、列表法或图象法表示,只能用言语来描述.如定义在 R 上的狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

和定义在 $[0, 1]$ 上的黎曼函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} (p, q \text{ 为正整数, } \frac{p}{q} \text{ 为既约分数}), \\ 0, & x = 0, 1 \text{ 和无理数.} \end{cases}$$

三、函数的四则运算

我们知道函数有三要素:定义域、对应关系、值域.实质上当一个函数的定义域和对应关系确定时,它的值域也被唯一确定,因此定义两个函数的相等和四则运算,只须同时考虑定义域和对应关系这两个要素即可.

给定两个函数 $f(x)$, $x \in A$ 和 $g(x)$, $x \in B$, 记 $D = A \cap B$ 且 $D \neq \emptyset$. 现对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的相等及 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积的运算作如下定义:

1. 若 $A = B$, 且 $\forall x \in A$, 有 $f(x) = g(x)$, 则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等,表示为 $f = g$.

如 $f(x) = x, x \in R$ 与 $g(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x), x \in R$. 虽然函数的解析式不同,但它们具有相同的定义域,并且对 $\forall x \in R$, 有

$$x = x(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

于是,函数 $f(x) = x, x \in R$ 与 $g(x) = x(\sin^2 x + \cos^2 x), x \in R$ 相等.

相反的,对于函数 $f(x) = x+1$ 与 $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, x \in R - \{1\}$. 虽然,对 $\forall x \in R - \{1\}$, 有

$x+1 = \frac{x^2-1}{x-1}$, 但是这两个函数的定义域不相等,于是 $f(x) \neq g(x)$.

$$2. F(x) = f(x) + g(x), \quad x \in D$$

$$G(x) = f(x) - g(x), \quad x \in D$$

$$H(x) = f(x)g(x), \quad x \in D$$

若在 D 中剔除使 $g(x) = 0$ 的 x 值,即当 $D^* = D - \{x \mid g(x) = 0\} \neq \emptyset$ 时,还可以对 f 与



g 在 D^* 的商运算作出如下定义:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D^*$$

如 $f(x) = \ln(1-x), x \in (-\infty, 1)$ 与 $g(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 1]$ 记

$$D = (-\infty, 1) \cap [-1, 1] = [-1, 1)$$

$$D^* = D - \{x \mid g(x) = 0\} = [-1, 1) - \{-1, 1\} = (-1, 1)$$

则当 $x \in D$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和、差、积分别为

$$F(x) = f(x) + g(x) = \ln(1-x) + \sqrt{1-x^2},$$

$$G(x) = f(x) - g(x) = \ln(1-x) - \sqrt{1-x^2},$$

$$H(x) = f(x)g(x) = \sqrt{1-x^2} \ln(1-x).$$

而当 $x \in D^*$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的商为

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

今后为叙述方便, 我们将 f 与 g 的和、差、积、商常分别写作

$$f+g, \quad f-g, \quad fg, \quad \frac{f}{g}.$$

四、复合函数

在有些实际问题中, 自变量与因变量的函数关系是通过其它变量才建立起来的. 例如, 函数

$$t = \ln y \quad \text{与} \quad y = x - 1$$

经过中间变量 y 的传递生成新函数 $t = \ln(x-1)$, 于是 t 又是 x 的函数. 仅对 $y = x-1$ 来说, x 可取任意实数, 但是对生成的新函数而言, 此处必须要求 $y = x-1 > 0$, 即 $x > 1$. 此时我们将 $t = \ln(x-1)$ 称为函数 $t = \ln y$ 与 $y = x-1$ 的复合函数.

下面给出复合函数的具体定义:

定义 1-5 设有两个函数 $y = f(u), u \in D$ 与 $u = g(x), x \in E$

若 G 是 E 中使 $u = g(x) \in D$ 的 x 的非空子集, 即

$$G = \{x \mid g(x) \in D, x \in E\} \neq \emptyset$$

则对每一个 $x \in G$, 按照对应关系 g 对应唯一的一个 $u \in D$, 再按照对应关系 f 对应唯一的一个 y . 这样就确定了一个定义在 G 上, 以 x 为自变量, y 为因变量的函数. 记作

$$y = f[g(x)], \quad x \in G$$

或

$$y = (f \circ g)(x), \quad x \in G$$

称为函数 $y = f(u), u \in D$ 与 $u = g(x), x \in E$ 的复合函数. 其中 $f(u)$ 称为外函数, $g(x)$ 称为内函数, u 为中间变量.

如由函数 $t = \sqrt{y}$ 与 $y = (x-1)(2-x)$ 生成的复合函数是

$$(f \circ g)(x) = t = \sqrt{(x-1)(2-x)},$$

而此时复合函数的定义域由 $y \geq 0$ 确定, 即 $\{x \mid (x-1)(2-x) \geq 0\}$. 于是, 此复合函数的定义域为 $\{x \mid 1 \leq x \leq 2\}$.



当然复合函数也可以由多个函数复合而成. 例如, 由以下三个函数

$$\begin{aligned} y &= \log_a u, & u &\in (0, +\infty) \\ u &= \sqrt{z}, & z &\in [0, +\infty) \\ z &= 1 - x^2, & x &\in (-1, 1) \end{aligned}$$

形成的复合函数为 $y = \log_a \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$.

此外, 我们不仅能将若干个简单函数生成为复合函数, 而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数. 例如, 函数 $y = \tan^5 \sqrt[3]{\lg \arcsin x}$ 是由五个简单函数 $y = u^5$, $u = \tan v$, $v = \sqrt[3]{w}$, $w = \lg t$, $t = \arcsin x$ 所生成的复合函数.

注 f 与 g 只是函数 f 与 g 的一种复合运算. 一般来说, $f \circ g \neq g \circ f$.

例如, 设 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$, 则

$$(f \circ g)(x) = \sin x^2 \neq (\sin x)^2 = (g \circ f)(x), \forall x \neq 0.$$

这说明函数的复合运算与实数的加、乘运算不同, 它不满足交换律, 但容易证明它满足结合律:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

五、反函数

定义 1-6 设函数 $y = f(x)$, $x \in A$. 若对于值域 $f(A)$ 中每一个值 y_0 , A 中有且只有一个值 x_0 和它对应, 即 $f(x_0) = y_0$, 则按此对应法则能得到一个定义在 $f(A)$ 上的函数, 称这个函数为 $f(x)$ 的反函数, 记作

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow A$$

或

$$x = f^{-1}(y), y \in f(A).$$

关于定义的理解, 需注意:

(1) f^{-1} 是 f 的反函数, 反之, f 也是函数 f^{-1} 的反函数. 此时称 f 与 f^{-1} 互为反函数, 并且有

$$f^{-1}[f(x)] \equiv x, x \in A \text{ 和 } f[f^{-1}(y)] \equiv y, y \in f(A)$$

(2) 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域恰好是原函数的值域和定义域.

例如, 函数 $y = 2x + 1$ 的定义域为 \mathbf{R} , 值域也是 \mathbf{R} . $\forall y \in \mathbf{R}$ (值域) 对应 \mathbf{R} (定义域) 中唯一一个 x , 即 $x = \frac{1}{2}(y - 1)$, 则 $y = 2x + 1$ 的反函数是 $x = \frac{1}{2}(y - 1)$, $y \in \mathbf{R}$.

又如 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域是 \mathbf{R} , 值域是 $(0, +\infty)$. $\forall y \in (0, +\infty)$ 对应 \mathbf{R} 中唯一一个 $x = \log_a y$, 则 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的反函数是 $x = \log_a y$, $y \in (0, +\infty)$.

实质上, 并不是每一个函数都有反函数. 那么什么样的函数才有反函数呢? 我们有下面的定理:

定理 1-1 若函数 $y = f(x)$ 在数集 A 严格增加(严格减少), 则函数 $y = f(x)$ 存在反函数, 且反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $f(A)$ 也严格增加(严格减少).

注: 函数的严格单调仅是函数存在反函数的充分条件, 而不是必要条件.

例如, 如图 1-1 函数



$$y = \begin{cases} -x + 1, & -1 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

显然函数在 $f([-1, 1]) = [0, 2]$ 上存在反函数

$$x = f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - y, & 1 < y \leq 2 \end{cases},$$

但在 $[-1, 1]$ 上该函数不是单调函数.

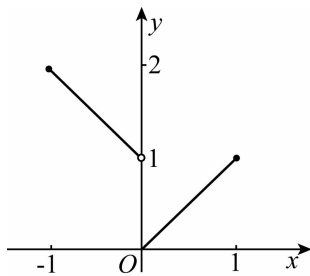
另外, 函数在其定义域上不一定有反函数, 但是若将函数限定在定义域的某个子集上, 它就可能存在反函数. 如:

1. $y = x^2$ 在定义域 R 上不存在反函数. 因为 $\forall y > 0$, 在定义域 R 上对应两个不同的 $x = \pm\sqrt{y}$, 但若将 $y = x^2$ 限定在 $[0, +\infty)$ 上, 它是严格增加的, 由定理可知, $y = x^2, x \in [0, +\infty)$ 存在反函数 $x = \sqrt{y}, y \in [0, +\infty)$.

2. 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 在各自的定义域 R 上都不存在反函数, 但若将 $y = \sin x$ 定义在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq R$ 上, 它是严格增加的, 由定理 1-1 可知, 它存在反函数 $x = \arcsin y, y \in [-1, 1]$. 同样地, 将 $y = \cos x$ 定义在 $[0, \pi] \subseteq R$ 上, 它是严格减少的, 则存在反函数 $x = \arccos y, y \in [-1, 1]$.

在数学中, 人们习惯用 x 表示函数的自变量, y 表示因变量. 所以 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y), y \in f(A)$ 常写作 $y = f^{-1}(x), x \in f(A)$. 而当函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在一起讨论时, 为避免混淆, 常又将其反函数表示为 $x = f^{-1}(y)$.

由中学数学对一些常见函数的研究, 我们不难看出函数 $y = f(x)$ 与它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称.



如图 1-1

六、初等函数

数学中, 我们将常数函数 $y = c$ (c 为常数)、幂函数 $y = x^\alpha$ (α 为实数)、指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$)、对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)、三角函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 与反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 等六类函数统称为基本初等函数. 而凡是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合运算所得到的函数, 统称为初等函数. 例如 $y = \log_a \sqrt{x}, y = \frac{1 + e^x}{\sqrt{1 - x^2}}$ 以及多项式函数

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, x \in (-\infty, +\infty)$$

等都是初等函数.

凡不是初等函数的函数, 被称为非初等函数. 如狄利克雷函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

与符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \text{ 等.} \end{cases}$$



第四节 函数的性质

一、函数的有界性

定义 1-7 设 f 为定义在 A 上的函数, 若存在数 M , 对每一个 $x \in A$ 都有

$$f(x) \leq M \quad (f(x) \geq M)$$

则称 f 为 A 上有上(下)界函数, M 称为 f 的一个上(下)界.

根据定义, 若 M 为 f 的上(下)界, 则任何大(小)于 M 的数也是 f 在 A 上的上(下)界.

类似的, 设 f 为定义在 A 上的函数, 若对每一个数 M (无论 M 多大), 都存在数 $x_0 \in A$, 使得 $f(x_0) > M$, 则称 f 为 A 上无上界函数.

定义 1-8 设 f 为定义在 A 上的函数, 若存在正数 M , 对每一个 $x \in A$ 都有

$$|f(x)| \leq M$$

则称 f 为 A 上有界函数.

根据定义, f 为 A 上有界函数, 意味着 f 在 A 上既有上界又有下界, 它的图象完全落在以直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 为边界的带形区域内 ($y = M$ 与 $y = -M$ 不一定与曲线 $y = f(x)$ 相切).

如正弦函数 $y = \sin x$ 和余弦函数 $y = \cos x$ 对每一个 $x \in \mathbf{R}$, 都有

$$|\sin x| \leq 1 \text{ 和 } |\cos x| \leq 1$$

所以它们都是有界函数.

作为练习, 请自行写出无下界函数与无界函数的定义.

二、函数的单调性

定义 1-9 设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义. 若 $\forall x_1, x_2 \in A$, 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 为 A 上的递增(减)函数.

若将上述不等式改为

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 为 A 上的严格递增(减)函数.

递增与递减函数统称为单调函数.

如函数 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格递增函数. 因为当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $x_1^3 < x_2^3$.

而函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上是递减的, 在 $(0, +\infty)$ 上是递增的, 但在整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上不具有单调性.

由第三节可知, 严格单调函数必有反函数, 所以我们不难证明如下定理:

定理 1-2 严格递增(减)函数的反函数也必是严格递增(减)的.



三、函数的周期性

定义 1-10 设 $f(x)$ 为定义在数集 A 上的函数, 若 $\exists l > 0, \forall x \in A$, 有 $x \pm l \in A$, 且 $f(x \pm l) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是周期函数, l 为 $f(x)$ 的一个周期.

显然, 若 l 为 $f(x)$ 的周期, 则 $2l, 3l, 4l \cdots nl$ (n 是正整数) 也是 f 的周期. 若在 $f(x)$ 的所有周期中有一个最小的正周期, 则称这个周期为 $f(x)$ 的基本周期, 简称为周期.

如 $y = \sin x$ 的周期为 2π , $y = \cos x$ 的周期为 π , $y = c$ 是以任何正数为周期的函数, 但不存在基本周期.

描述周期函数的图象, 只要在一个周期长的区间上描出函数的图象, 然后将此图象一个周期一个周期地向左右平移, 就得到了它在整个定义域上的图象.

四、函数的奇偶性

定义 1-11 设 A 为对称于原点的数集, f 是定义在 A 上的函数, 若对每一个 $x \in A$ (这时也有 $-x \in A$), 都有

$$f(-x) = -f(x) \quad (f(-x) = f(x))$$

则称 $f(x)$ 为 A 上的奇(偶)函数.

如函数 $f(x) = c$ 是偶函数, 当 $c=0$ 时, 它也是奇函数; 又如函数 $f(x) = \sin x$ 和 $f(x) = \cos x$ 分别为 R 上的奇函数和偶函数. 因为 $\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$, 而 $f(x) = \sin x + \cos x$ 既不是奇函数, 也不是偶函数.

从图象上来看, 奇函数的图象关于原点对称, 偶函数的图象关于 y 轴对称.

习 题 一

1. 回答下列问题:

(1) 什么叫实数的稠密性?

(2) 一个无理数和一个有理数之和是有理数还是无理数? 它们的乘积呢?

2. 设 $a \neq 0$, 证明 $\left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2$, 并说明等号成立的条件.

3. 设 a, b, c 都为正实数. 证明 $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$, 并说明此不等式的几何意义.

4. 对于 $n \geq 1$, 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n-1)} < 1$$

$$(2) \frac{1}{3}n^2 < 1 + 2 + 3 + \cdots + n < \frac{1}{2}(n+1)^2$$

$$(3) \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)^2 < 2n \text{ (可用数学归纳法)}$$

5. 试用平均值不等式证明:



$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ 其中 } n \text{ 为正整数}$$

提示: 可令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \frac{1}{n}, x_{n+1} = 1$.

6. 在数轴上画出下列数集所表示的区间:

(1) $\{x \mid (x-2)(x+3) < 0\}$;

(2) $\{x \mid x^3 + x \geq 1\}$;

(3) $\left\{x \mid \frac{2}{x-2} < 5\right\}$;

(4) $U\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$;

(5) $U^0(5, 3)$.

7. 指出下列数集的上确界与下确界(如果存在), 并验证之:

(1) $\{-10, -2, 0, 5, 8\}$; (2) $\left\{(-1)^n \cdot \frac{1}{2^n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\}$;

(3) $\left\{1 + \frac{4}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\right\}$; (4) $\{x^2 \mid -1 < x \leq 2\}$;

(5) $\{\sin x \mid x \in (0, 2\pi]\}$; (6) $\left\{x \mid x = 1 - \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots\right\}$.

8. 证明: 非空有界数集的上(下)确界是唯一的.

9. 证明: 若 A 与 B 是两个非空数集, 且对一切 $x \in A$ 和 $y \in B$ 都有 $x \leq y$, 则 $\sup A \leq \inf B$.

10. 设 A, B 为非空有界数集, 定义数集

$$A + B = \{Z \mid Z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

证明: (1) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$;

(2) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

11. 证明: 设数集 S 有上界, 则数集 $T = \{x \mid -x \in S\}$ 有下界, 且

$$\sup S = -\inf T.$$

12. 试作出下列函数的图象:

(1) $y = 1 - (x+1)^2$; (2) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$;

(3) $y = \begin{cases} 3x, & |x| > 1 \\ x^3, & |x| < 1 \\ 3, & |x| = 1 \end{cases}$

13. 指出下列函数在指定区间上的反函数及其定义域:

(1) $y = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1, 0]$; (2) $y = 10^{x+2}, x \in \mathbf{R}$;

(3) $y = \ln(2x+1), x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$; (4) $y = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2, & x \in [1, 4] \\ 2^x, & x \in (4, +\infty) \end{cases}$.

第二章 极限

从方法论来说,数学分析区别于初等数学的显著标志是用极限的方法来研究函数,并且数学分析中几乎所有的概念都离不开极限.因此,认识极限的概念,对我们来说非常重要.

第一节 数列的极限

一、数列极限的定义

由中学数学已经知道,数列可以看作定义域为正整数集或它的有限子集的函数,当自变量从小到大依次取值时,该函数对应的一系列函数值.而数列中我们最关心的是收敛数列以及它的极限.下面先来认识一个有关数列的例子:

古有“一尺之锤,日取其半,万世不竭.”意思是说一根长为—尺的木棒,每天截去一半,这样的过程可以无限的进行下去.

这个例子实质上涉及了一个数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \text{ 或 } \left\{ \frac{1}{2^n} \right\}.$$

不难看出,数列 $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$ 的通项将随着 n 的无限增大而逐渐地接近于常数 0.我们将具有这种特性的数列称为收敛数列,0 叫做该数列的极限.收敛数列的这一特性也可理解为:“要使 a_n 与某个常数 a 差的绝对值任意小,只要 n 充分大便可”.

下面我们给出一般收敛数列及其极限的概念.

定义 2-1 设 $\{a_n\}$ 是一数列, a 为常数.若对任意给定的 $\epsilon > 0$,总存在某个自然数 N ,使得 $n > N$ 时,都有 $|a_n - a| < \epsilon$,称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , a 为它的极限,记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \textcircled{1}$$

读作“当 n 趋于无穷大时, a_n 趋于 a ,也可记作 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.”

若数列 $\{a_n\}$ 不存在极限,则称这个数列不收敛或者数列 $\{a_n\}$ 发散.

数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a ,用逻辑符号可简要表示为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{ 有 } |a_n - a| < \epsilon.$$

这便是数列极限的 $\epsilon - N$ 定义,它由大数学家柯西(Cauchy)给出,以后我们将经常使用极限的 $\epsilon - N$ 定义.

对于数列极限的定义,读者应注意以下几点:

① 本应写为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,但为了书写方便,我们常把 $n \rightarrow +\infty$ 简单写作 $n \rightarrow \infty$.



1. ϵ 的定义在于衡量 a_n 与 a 的接近程度, ϵ 越小, 表示它们的接近程度越好. 然而, ϵ 虽有它的任意性, 但一经给出, 又可视为确定的. 因为只有对确定的 ϵ , 才能找到相应的自然数 N .

2. 定义中“使得 $n > N$ 时, 都有 $|a_n - a| < \epsilon$ ”, 从几何意义上来讲, 就是对任意 $\epsilon > 0$, 在以 a 为中心, 以 ϵ 为半径的邻域 $U(a, \epsilon)$ 或开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, 数列 $\{a_n\}$ 中所有下标大于 N 的项 a_{N+1}, a_{N+2}, \dots , 它们在数轴上所对应的点, 都位于 $U(a, \epsilon)$ 或开区间 $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ 内, 至多有 N 个点 a_1, a_2, \dots, a_N 在此邻域之外.

3. 关于某个数列的收敛与否、收敛于哪个数, 注意以下符号表示:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{ 有 } |a_n - a| < \epsilon.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a \Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, n_0 > N, \text{ 有 } |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$$

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbf{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{ 有 } |a_n - a| < \epsilon.$

数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \forall a \in \mathbf{R}, \exists \epsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, \exists n_0 > N, \text{ 有 } |a_{n_0} - a| \geq \epsilon_0.$

注: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq a$ 并不等于说数列 $\{a_n\}$ 发散.

下面举例说明怎样根据数列的 $\epsilon - N$ 定义来验证数列的极限.

例 1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = 1.$

证明 任意 $\epsilon > 0$, 要使不等式

$$\left| \frac{n}{n+3} - 1 \right| = \frac{3}{n+3} < \epsilon$$

成立, 则 $N > \frac{3}{\epsilon} - 3$. 取 $N = \left[\frac{3}{\epsilon} \right] + 1$, 其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 于是 $\forall \epsilon > 0, \exists N = \left[\frac{3}{\epsilon} \right]$

$+ 1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{ 有 } \left| \frac{n}{n+3} - 1 \right| = \frac{3}{n+3} < \epsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+3} = 1.$

例 2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3.$

分析 由于 $\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| = \frac{12}{n^2 - 4} \leq \frac{12}{n} (n \geq 3),$ (1)

因此, 对任给的 $\epsilon > 0$, 只要 $\frac{12}{n} < \epsilon$, 便有

$$\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| < \epsilon$$
 (2)

即当 $n > \frac{12}{\epsilon}$ 时, (2) 式就成立. 又由于 (1) 式是在 $n \geq 3$ 的条件下成立的, 故应取

$$N = \max \left\{ 3, \frac{12}{\epsilon} \right\}.$$

证明 $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \max \left\{ 3, \frac{12}{\epsilon} \right\}$, 由分析知, $\forall n > N$, 有

$$\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| < \epsilon$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3.$



注 本题在求 N 时,采取了适当放大的方法,这样求 N 较方便.

例 3 证明常数列 $\{a_n = c\}$ 的极限是 c , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

证明 $\forall \varepsilon > 0, n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

例 4 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, |q| < 1$.

证明 当 $q = 0$ 时, $\forall n \in \mathbf{N}_+, q^n = 0$, 这是常数列. 由例 3 知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

当 $0 < |q| < 1$ 时, $\forall \varepsilon > 0$ (限定 $0 < \varepsilon < |q|$), 要使不等式

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$$

成立, 解 $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ ($\ln \varepsilon < 0$ 与 $\ln |q| < 0$). 取 $N = \lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \rceil$. 于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists N =$

$$\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \rceil \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, \text{ 有 } |q^n - 0| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

例 5 证明数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

分析 只需证明 $\forall a \in \mathbf{R}$, 都不是数列 $\{(-1)^n\}$ 的极限.

证明 $\exists \varepsilon_0 = 1$, 分两种情况:

当 $a \geq 0$, $\forall N \in \mathbf{N}_+, \exists n_0$ (奇数) $> N$, 有

$$|(-1)^{n_0} - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq \varepsilon_0.$$

当 $a < 0$, $\forall N \in \mathbf{N}_+, \exists n_0$ (偶数) $> N$, 有

$$|(-1)^{n_0} - a| = |1 - a| = 1 + (-a) > \varepsilon_0.$$

即数列 $\{(-1)^n\}$ 发散.

二、收敛数列的性质及四则运算

为了更深入地研究数列极限, 我们先来学习一些数列极限的性质.

定理 2-1(唯一性) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则它的极限唯一.

证明 假设 a 与 b 都是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 则由极限的定义可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必定分别存在正数 N_1, N_2 , 使得

当 $n > N_1$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 当 $n > N_2$ 时有 $|a_n - b| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 利用三角不等式, 那么当 $n > N$ 时, 就有

$$|a - b| = |(a_n - b) - (a_n - a)| \leq |a_n - b| + |a_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

由 ε 可以任意接近于 0, 即知 $a = b$. 从而收敛数列 $\{a_n\}$ 的极限是唯一的.

定理 2-2(有界性) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 则数列 $\{a_n\}$ 为有界数列. 即 $\exists M > 0$, 使得对一切 $n \in \mathbf{N}_+$, 有 $|a_n| \leq M$.

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 取 $\varepsilon = 1$, 由极限定义, $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 有



$$|a_n - a| < 1$$

即

$$a - 1 < a_n < a + 1$$

取 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a-1|, |a+1|\}$, 则对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $|a_n| \leq M$. 即数列 $\{a_n\}$ 有界.

注 (1) 定理 2-2 的逆否命题是: 若数列 $\{a_n\}$ 无界, 则数列 $\{a_n\}$ 发散. 它们是等价命题.

(2) 数列有界仅是数列收敛的必要条件. 换句话说, 数列有界未必收敛. 例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 有界, 但它发散.

定理 2-3(保序性) 设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a 和 b , 且 $a < b$, 则存在 $N \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, 有 $a_n < b_n$.

证明 取 $\epsilon = \frac{b-a}{2}$, 由已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 可得

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_1, \text{ 有 } |a_n - a| < \frac{b-a}{2}, \text{ 从而 } a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$\exists N_2 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_2, \text{ 有 } |b_n - b| < \frac{b-a}{2}, \text{ 从而 } b_n > b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, $\forall n > N$, 有

$$a_n < \frac{a+b}{2} < b_n.$$

由定理 2-3, 我们还可以得到下面的推论:

推论 1 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 且 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N, a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$.

证明 用反证法. 假设 $b < a$. 由定理 2-3, 可得 $b_n < a_n$, 这与已知产生矛盾. 于是 $a \leq b$.

注意 在推论 1 中, 若 $a_n < b_n$, 未必有 $a < b$, 可能有 $a = b$. 如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{2}{n}, (n \in \mathbf{N}_+)$. 显然, $a_n < b_n$ 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

推论 2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a < b$, 则 $\exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 有

$$a_n < b.$$

此推论请读者自行证明.

定理 2-4(夹逼性) 若设数列 $\{a_n\}, \{c_n\}$ 为收敛数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. 若存在某个自然数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, 有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 可得

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_1, \text{ 有 } |a_n - a| < \epsilon, \text{ 从而 } a - \epsilon < a_n;$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, 可得 $\exists N_2 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_2$, 有 $|c_n - a| < \epsilon$, 从而 $c_n < a + \epsilon$.

取 $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N$, 有

$$a - \epsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \epsilon$$

于是

$$|b_n - a| < \epsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a.$$

该定理告诉我们, 若两个数列“夹着一个数列”共同趋于一个极限, 则夹着的数列也必定趋



于这个极限. 因此在以后求一些数列极限时, 可适当构造两个数列, 只要这两个数列夹着原数列趋于一个共同的极限, 那么就得到原数列的极限.

例 6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

解 因为 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

不妨取 $a_n = 0, b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 显然有 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$,

由定理 2-4 可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$$

三、收敛数列的四则运算

定理 2-5 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是收敛数列, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 也是收敛数列, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \end{aligned}$$

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\exists N_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_1, \text{ 有 } |a_n - a| < \varepsilon$$

与

$$\exists N_2 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_2, \text{ 有 } |b_n - b| < \varepsilon;$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 上述两不等式同时成立, 由此有

$$\begin{aligned} 1. | (a_n + b_n) - (a + b) | &= | (a_n - a) + (b_n - b) | \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

同理可证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

$$\begin{aligned} 2. | a_n b_n - ab | &= | (a_n b_n - a_n b) + (a_n b - ab) | \\ &\leq | a_n b_n - a_n b | + | a_n b - ab | \\ &\leq | a_n | | b_n - b | + | b | | a_n - a | \end{aligned}$$

由收敛数列的有界性定理, $\exists M > 0$, 对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|a_n| \leq M.$$

于是, $\forall n > N$, 有

$$|a_n b_n - ab| < (M + |b|)\varepsilon$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

定理 2-6 若数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都收敛, 且 $b_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, 则数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 也收敛, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

证明 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, 由极限定义, $\forall \varepsilon > 0$,



与 $\exists N_1 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_1$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$
 $\exists N_2 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_2$, 有 $|b_n - b| < \varepsilon$;
 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, 取 $\varepsilon_0 = \frac{|b|}{2} > 0$, $\exists N_3 \in \mathbf{N}_+, \forall n > N_3$, 有

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$$

从而 $|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$,

或 $\frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}$

$\exists N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$, $\forall n > N$, 同时有

$$|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon \text{ 与 } \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|}.$$

于是, $\forall n > N$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| &= \frac{1}{|b_n b|} |a_n b - b_n a| = \frac{1}{|b_n b|} |a_n b - ab + ab - b_n a| \\ &\leq \frac{1}{|b_n| |b|} (|b| |a_n - a| + |a| |b_n - b|) \\ &< \frac{2}{|b|^2} (|a| + |b|) \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

其中 $\frac{2}{|b|^2} (|a| + |b|)$ 是正常数, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

从定理 2-5 和 2-6 可以看出: 两个收敛数列的四则运算与极限的运算可以交换次序.

例 7 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1}$.

解 将分式 $\frac{2n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1}$ 的分子和分母同除以 n^2 , 再根据定理 2-5、2-6 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 2}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

例 8 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{3n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n})$.



解 由定理 2-5、2-6 可得,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \\ &= 3 \cdot 1 \\ &= 3\end{aligned}$$

本题也可用例 7 的解法,请读者尝试去完成.

例 9 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}}$.

解 由例 4 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$, 于是,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^{n+1} + 3^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right]}{3^{n+1} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right]} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 1 \right]}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} + 1 \right]} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

四、数列极限存在的条件

定理 2-2 明确告诉我们:收敛数列一定有界,而有界数列不一定收敛.那么附加什么条件时一个有界数列就收敛呢?下面我们讨论极限的存在性问题.

首先我们讨论单调数列的极限.所谓单调数列,其定义与单调函数相仿.若数列各项满足关系式

$$a_n \leq a_{n+1} \quad (a_n \geq a_{n+1})$$

则称数列 $\{a_n\}$ 为递增(递减)数列.递增数列和递减数列统称为单调数列.

关于单调数列的极限存在问题有如下定理:

定理 2-7(单调有界定理) 任何有界的单调数列一定有极限.

证明 不妨设 $\{a_n\}$ 为递增有上界数列.由确界定理,数列 $\{a_n\}$ 有上确界.令 $a = \sup\{a_n\}$, 下面证明 a 就是数列 $\{a_n\}$ 的极限.

事实上,任给 $\varepsilon > 0$,按上确界的定义,存在数列 $\{a_n\}$ 中某项 a_N ,使得 $a - \varepsilon < a_N$.又由 $\{a_n\}$ 的递增性,当 $n \geq N$ 时都有 $a - \varepsilon < a_N \leq a_n$.另一方面,由于 a 是 $\{a_n\}$ 的一个上界,故对一切 a_n 都有 $a_n \leq a$,因而便有 $a_n < a + \varepsilon$.这样就导出了:任给 $\varepsilon > 0$ 存在自然数 N ,使得当 n



$\geq N$ 时有 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. 即

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

下面我们举例来说明它的应用.

例 10 设

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}, n = 1, 2, \cdots$$

若实数 $\alpha \geq 2$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 显然 $\{a_n\}$ 是递增的数列, 所以只需证 $\{a_n\}$ 有上界. 事实上

$$\begin{aligned} a_n &\leq 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 2, n = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

于是由单调有界定理, 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

单调有界定理只是数列收敛的充分条件. 要判别任意一个数列的敛散性有下面重要的定理:

定理 2-8 (柯西收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall m, n > N$, 有

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

柯西收敛准则指出: 数列收敛等价于数列中充分远的任意两项的距离能够任意小. 与数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义相比较, 柯西收敛准则把原来的 a_n 与 a 的关系换成了 a_n 与 a_m 的关系, 其优点在于无需借助数列以外的数 a , 只要根据数列自身各项之间的相互关系就可以判别它的敛散性.

柯西收敛准则的否定叙述也可以用来判别某个数列的发散. 现将该准则的正反叙述对比如下:

数列 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall m, n > N$, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$

数列 $\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}_+, \exists m_0, n_0 > N$, 有 $|a_{n_0} - a_{m_0}| \geq \varepsilon_0$

例 11 证明若 $a_n = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} (n \in \mathbf{N})$, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

证明 任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \lceil \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \rceil$, 则当 $m > n > N$ 时, 恒有

$$|a_m - a_n| = \left| (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + (-1)^{m-1} \frac{1}{m^2} \right| < \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

由柯西收敛准则知 $\{a_n\}$ 收敛.

例 12 证明若 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} (n \in \mathbf{N})$, 则 $\{x_n\}$ 不收敛.

证明 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, 对 $\forall N$, 取 $n = N + 1, m = 2n$,

$$|x_m - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$



由柯西收敛准则知 $\{x_n\}$ 发散.

第二节 函数的极限

一、函数极限的定义

在上一节我们讨论了数列的极限,现在来讨论另一类极限,即函数的极限.对于函数 $y = f(x)$,我们主要考虑这样的问题:当自变量趋于某个点 a 时,因变量 y 是否相应地趋于某个定值 A .

先看这样一个问题:求抛物线 $y = 2x^2$ 在其上一点 $P(1,2)$ 处的切线方程.

由解析几何知,曲线在点 P 的切线是过点 P 的割线 PQ 当点 Q 沿曲线无限接近于点 P 时的极限位置.如图 2-1 所示:

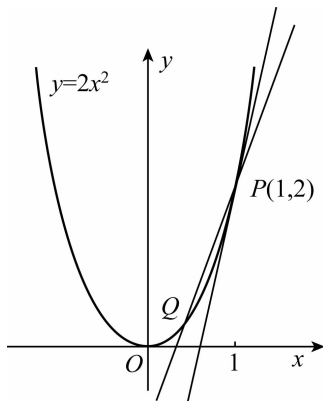


图 2-1

设过点 $P(1,2)$ 的切线斜率是 k ,切线方程就是

$$y - 2 = k(x - 1)$$

怎样求切线斜率 k 呢? 在抛物线 $y = 2x^2$ 上点 P 附近任取一点 Q , 设点 Q 的横坐标是 x ($x \neq 1$), 则点 Q 的坐标是 $Q(x, 2x^2)$. 已知割线 PQ 的斜率

$$k_1 = \frac{y - 2}{x - 1} = \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

因为点 Q 不同于点 P , 即 $x \neq 1$, 所以

$$k_1 = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = 2(x + 1)$$

若点 Q 沿抛物线 $y = 2x^2$ 无限趋近于点 P , 即当 x 无限趋近于 1 时, 割线 PQ 的斜率 $k_1 = \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = 2(x + 1)$ 无限趋近于 4, 此时过点 P 的切线斜率 $k = 4$ 就是所谓函数 $\frac{2x^2 - 2}{x - 1}$ 的“极限”(当 x 无限趋近于 1 时). 于是, 过点 P 的切线方程是

$$y - 2 = 4(x - 1) \text{ 或 } 4x - y - 2 = 0$$



何谓“当 x 无限趋近于 1 时, 函数 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 趋近于 4”? 这就是说, $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 与 4 的距离

$|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4|$ 能任意小, 并保持任意小, 只需 x 与 1 的距离 $|x-1|$ 充分小. 例如:

对 $\frac{1}{10}$, 能够做到 $|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4| = 2|x-1| < \frac{1}{10}$, 只需 $0 < |x-1| < \frac{1}{20}$ 即可.

对 $\frac{1}{10^3}$, 能够做到 $|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4| = 2|x-1| < \frac{1}{10^3}$, 只需 $0 < |x-1| < \frac{1}{2 \times 10^3}$ 即可.

一般地, 对 $\forall \epsilon > 0$, 能够做到 $|\frac{2x^2-2}{x-1} - 4| = 2|x-1| < \epsilon$, 只需 $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{2}$ 即可.

可. 若将这句话的文字叙述稍加改动, 就是“当 x 无限趋近于 1 时, 函数 $\frac{2x^2-2}{x-1}$ 趋近于 4”的定量叙述:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2} > 0, \forall x: 0 < |x-1| < \delta, \text{ 有}$$

$$\left| \frac{2x^2-2}{x-1} - 4 \right| < \epsilon$$

下面给出一般的函数 $f(x)$ (当 $x \rightarrow x_0$ 时) 的极限定义:

定义 2-2 设函数 $f(x)$ 在点 x 的某个去心邻域 $U^0(x_0)$ 内有定义, A 是常数. 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x-x_0| < \delta$, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时极限存在, 且以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

这一定义亦被称为函数在一点极限的 $\epsilon - \delta$ 定义.

关于定义的理解应注意两点:

(1) 定义中只要求函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域有意义, 这里只要求“去心”意即不考虑 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值是否有定义. 换句话说 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限仅与函数 $f(x)$ 在 x_0 的附近的 x 的函数值 $f(x)$ 的变化有关, 而与 $f(x)$ 在 x_0 的情况无关.

(2) 定义中的 δ , 相当于数列极限 $\epsilon - N$ 定义中的 N , 它依赖于 ϵ , 但也不是由 ϵ 所唯一确定. 一般来说, ϵ 越小, δ 也相应地要小一些. ϵ 和 δ 有类似于数列极限定义中的非 0 常数倍变形, 如 $2\epsilon, \frac{\epsilon}{2}, \frac{\delta}{2}, \sqrt{\epsilon}$ 等.

另外, 从几何意义上来讲, 函数极限的 $\epsilon - \delta$ 表明: 在平面直角坐标系 xOy 的 y 轴上取以 A 为中心, ϵ 为半径的一个开区间 $(A - \epsilon, A + \epsilon)$, 在 x 轴上存在一个以 x_0 为中心, δ 为半径的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 对位于 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 的任意 x , 所对的函数值都落在 $(A - \epsilon, A + \epsilon)$ 所表示的带形区域之内, 但点 $(x_0, f(x_0))$ 可能例外 (或无意义). 如图 2-2 所示.

有些函数在其定义域上某些点处, 它的左侧与右侧所用的表示其对应法则的解析式不同 (如分段函数), 或函数仅在其某一侧有定义, 这时函数在这些点上的极限问题只能单侧的加以讨论.

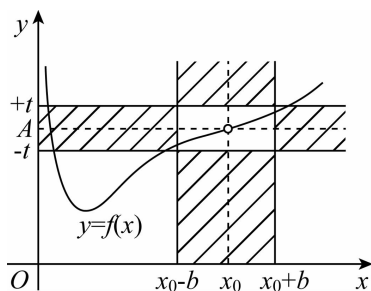


图 2-2

函数的单侧极限有如下定义:

定义 2-3 设函数 $f(x)$ 在 a 右侧(左侧)有定义, A 是常数. 若对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: a < x < a + \delta (a - \delta < x < a)$, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 趋于 a^+ (a^-) 时右(左)极限存在, 并以 A 为右(左)极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A \text{ 或 } f(a+0) = A$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A \text{ 或 } f(a-0) = A$$

关于函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 时的极限与它在点 a 的左右极限之间的关系有如下定理:

定理 2-9 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A$

证明 必要性. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$,

$$0 < |x - a| < \delta \Leftrightarrow a - \delta < x < a \text{ 与 } a < x < a + \delta.$$

于是, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: a - \delta < x < a$ 与 $a < x < a + \delta$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = A.$$

充分性. 已知, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 即对

$$\forall \epsilon > 0, \begin{cases} \exists \delta_1 > 0, \forall x: a - \delta_1 < x < a, \\ \exists \delta_2 > 0, \forall x: a < x < a + \delta_2, \end{cases} \text{ 有 } |f(x) - A| < \epsilon.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - a| < \delta$, 有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

定理 2-9 不仅可以用于说明所讨论的函数极限是否等于 A , 而且也常用来证明某些函数极限的不存在. 如函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 0^-$ 时, $f(0+0) = f(0-0) = 0$, 故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



而像符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn}x$ 在 $x \rightarrow 0^+$ 和 $x \rightarrow 0^-$ 时分别有

$$f(0+0) = 1, f(0-0) = -1,$$

故 $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}x$ 不存在.

下面通过具体的实例说明怎样应用 $\epsilon - \delta$ 定义证明函数的极限.

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$.

证明 $\forall \epsilon > 0$, 要使不等式

$$|(2x + 3) - 5| = 2|x - 1| < \epsilon$$

成立, 解得 $|x - 1| < \frac{\epsilon}{2}$. 取 $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. 于是, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \frac{\epsilon}{2} > 0, \forall 0 < |x - 1| < \delta$, 有 $|(2x + 3) - 5| < \epsilon$ 即

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

证明 已知对任意满足 $\{x \mid x \neq 0\}$ 的 x , 有

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$\forall \epsilon > 0$, 要使不等式 $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \epsilon$ 成立, 取 $\delta = \epsilon$, 于是 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \epsilon > 0, \forall x: 0 < |x - 0| < \delta$, 有 $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$.

分析 当 $x \neq 1$ 时, $\forall \epsilon > 0$, 解

$$\left| \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \epsilon$$

找 δ 有困难. 因为函数 $\frac{x(x-1)}{x^2-1}$ 在 1 的极限只与 1 附近的 x 有关, 所以可限定 x 的变化范围.

如限定 $0 < |x - 1| < 1$, 即 $0 < x < 2$, 这里取定了一个 $\delta = 1$, 然后在保留 $|x - 1|$ 的情况

下, 将 $\frac{1}{2|x+1|}$ 放大求解.

证明 限定 $0 < |x - 1| < 1$, 即 $0 < x < 2$ 且 $x \neq 1$. $\forall \epsilon > 0$, 要使不等式

$$\left| \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{|x-1|}{2|x+1|} < \frac{1}{2}|x-1| < \epsilon$$

成立, 则有 $|x - 1| < 2\epsilon$. 取 $\delta = \min\{1, 2\epsilon\}$, 当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{x(x-1)}{x^2-1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}.$$



例 4 设 $g(x) = \frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}}$, 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1.$$

证明 (1) $\forall x > 0, \forall \epsilon > 0$, 要使不等式

$$|g(x) - 0| = \frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}} < \epsilon$$

成立, 解得 $x < \frac{1}{\lg(\frac{1}{\epsilon} - 1)}$ (限定 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$), 取 $\delta = \frac{1}{\lg(\frac{1}{\epsilon} - 1)}$, 于是, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta =$

$\frac{1}{\lg(\frac{1}{\epsilon} - 1)} > 0, \forall x: 0 < x < \delta$, 有 $|g(x) - 0| < \epsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.$$

(2) $\forall x < 0, \forall \epsilon > 0$, 要使不等式

$$g(x) - 1 = \left| \frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}} \right| = 1 - \frac{1}{1+10^{\frac{1}{x}}} < \epsilon$$

成立, 解得 $x > \frac{1}{\lg \frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$ (限定 $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$), 取 $\delta = -\frac{1}{\lg \frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$, 于是, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = -\frac{1}{\lg \frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$

$> 0, \forall x: -\delta < x < 0$, 有 $|g(x) - 1| < \epsilon$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 1.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, 依据定理 2-9, 函数 $g(x)$ 在 0 处不存在极限.

应用极限的 $\epsilon - \delta$ 定义, 还可以很容易推出以下两个常用的结论:

$$\lim_{x \rightarrow a} cx = c, \quad \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

二、函数极限的性质与四则运算法则

函数极限的许多性质、四则运算都与数列极限有类似之处. 本节仅就经常碰到的函数极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 给出与收敛数列相类似的一些定理及其证明.

定理 2-10(唯一性) 若函数 $f(x)$ 在 a 存在极限, 则它的极限是唯一的.

定理 2-11(局部有界性) 若函数 $f(x)$ 在点 a 有极限, 则在点 a 的某去心邻域内有界.

即若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 则 $\exists M > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall 0 < |x - a| < \delta_0$, 有

$$|f(x)| \leq M.$$

证明 已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 即 $\exists \epsilon_0 > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall 0 < |x - a| < \delta_0$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon_0$. 从而,

$\forall 0 < |x - a| < \delta_0$, 有

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + \epsilon_0.$$

于是, $\exists M = |A| + \epsilon_0 > 0, \exists \delta_0 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0$, 有



$$|f(x)| \leq M.$$

定理 2-12(局部保序性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 且 $A > B$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时成立

$$f(x) > g(x).$$

证明 取 $\varepsilon_0 = \frac{A-B}{2} > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 可知, $\exists \delta_1 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_1$, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon_0$, 从而

$$\frac{A+B}{2} < f(x).$$

又由 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ 可知, $\exists \delta_2 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_2$, 有 $|g(x) - B| < \varepsilon_0$, 从而

$$g(x) < \frac{A+B}{2}.$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时成立

$$g(x) < \frac{A+B}{2} < f(x).$$

推论 1 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 且 $\exists \delta_0 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0$, 有 $f(x) \leq g(x)$ (或 $f(x) \geq g(x)$), 则 $A \leq B$ (或 $A \geq B$).

证明 只证 $A \leq B$ 的情况. 应用反证法, 假设 $B < A$, 根据定理 2-12, $\exists \delta_0 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0$, 有 $g(x) < f(x)$, 取 $y = \min\{\delta, \delta_0\}$. 则当 $0 > |x - a| < y$ 时, 既有 $g(x) < f(x)$, 又有 $f(x) \leq g(x)$, 从而产生矛盾.

推论 2(保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 且 $A < 0$ (或 $A > 0$), 则 $\exists \delta_0 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0$, 有 $f(x) < 0$ (或 $f(x) > 0$).

证明 在定理 2-12 中, 取 $g(x) = 0$, 有 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. 于是, $\exists \delta_0 > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta_0$, 有 $f(x) < 0$ (或 $f(x) > 0$).

定理 2-13(夹逼性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, 且存在 a 的某去心邻域 $U^0(a)$, 使得对一切 $x \in U^0(a)$, 有

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \tag{1}$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A.$$

证明 由 $\varepsilon - \delta$ 定义, 任给正数 ε , 分别存在正数 δ_1, δ_2 , 当 $0 < |x - a| < \delta_1$ 时, 有

$$A - \varepsilon < f(x), \tag{2}$$

当 $0 < |x - a| < \delta_2$ 时, 有

$$g(x) < A + \varepsilon. \tag{3}$$

于是, 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 不等式(1)、(2)、(3)应同时成立, 即有

$$A - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < A + \varepsilon$$

或

$$|h(x) - A| < \varepsilon.$$

这就得到所要证的结论.

定理 2-14(四则运算法则) 若极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 都存在, 则函数 $f \pm g, f \cdot g$ 在 $x \rightarrow$



a 时极限也存在,且

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

又若 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, 则 f/g 在 $x \rightarrow a$ 时极限也存在,且有

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

这个定理的证明可以仿照数列极限中相应定理的证明方法,请读者作为练习自行完成.

利用函数极限的四则运算法则,我们可以从几个简单的函数极限出发,计算较复杂函数的极限.

例 5 求 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x \tan x - 1)$.

解 由于 $x \tan x - 1 = \frac{x \sin x}{\cos x} - 1$ 及前面的结论 $\lim_{x \rightarrow a} c = c$, $\lim_{x \rightarrow a} x = a$, 按四则运算法则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (x \tan x - 1) &= \frac{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} x \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x}{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x} - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 1 \\ &= \frac{\frac{\pi}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1 = \frac{\pi}{4} - 1. \end{aligned}$$

例 6 求 $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right)$.

解 当 $x+1 \neq 0$ 时,有

$$\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x-2)}{x^3+1} = \frac{x-2}{x^2-x+1}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2-x+1} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} x - \lim_{x \rightarrow -1} 2}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1} \\ &= \frac{-1-2}{(-1)^2 - (-1) + 1} = -1 \end{aligned}$$

三、函数极限存在的条件

与数列极限存在的条件一样,我们将从函数值的趋势来判断它的极限的存在性.

定理 2-15(海涅定理) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任意数列 $\{a_n\}, a_n \neq a$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

证明 必要性. 已知 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x-a| < \delta$, 有 $|f(x)$



$-A| < \epsilon$.

对任意数列 $\{a_n\}, a_n \neq a$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 根据数列极限的定义, 对上述 $\delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n > N$, 有

$$0 < |a_n - a| < \delta,$$

从而, $\forall n > N$, 有 $|f(a_n) - A| < \epsilon$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A.$$

充分性 (\Leftarrow) 应用反证法. 假设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq A$. 根据函数极限的否定叙述: $\exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x: 0 < |x - a| < \delta$, 有 $|f(x) - A| \geq \epsilon_0$, 取

$$\delta_1 = 1, \exists a_1: 0 < |a_1 - a| < 1, \text{ 有 } |f(a_1) - A| \geq \epsilon_0;$$

$$\delta_1 = \frac{1}{2}, \exists a_2: 0 < |a_2 - a| < \frac{1}{2}, \text{ 有 } |f(a_2) - A| \geq \epsilon_0;$$

.....

$$\delta_n = \frac{1}{n}, \exists a_n: 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}, \text{ 有 } |f(a_n) - A| \geq \epsilon_0.$$

于是构造出一个数列 $\{a_n\}, a_n \neq a$, 因为 $\delta_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq A$, 这与已知条件矛盾. 即

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

应用海涅定理, 判别函数在某一点不存在极限比较方便. 根据原命题与其逆否命题的等价性, 我们可以得出如下推论:

推论 1 若存在某个数列 $\{a_n\}, a_n \neq a$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 而它的函数值数列 $\{f(a_n)\}$ 不存在极限, 则函数 $f(x)$ 在 a 也不存在极限.

推论 2 若存在某两个数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$, $a_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 与 $b_n \neq a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = c$ 与 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = d$, 而 $c \neq d$, 则函数 $f(x)$ 在 a 不存在极限.

例 7 证明极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证明 根据推论 2, 取 $a_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, b_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}, n \in \mathbf{N}_+$, 显然 $a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, b_n$

$\neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 由于

$$f(a_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, f(b_n) = \sin\left(2n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

从而, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$. 于是, 函数 $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 在 0 处不存在极限.

关于函数极限存在还有如下的柯西收敛准则:

定理 2-16 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'': 0 < |x' - a| < \delta$ 与 $0 < |x'' - a| < \delta$



$-a| < \delta$, 有

$$|f(x') - f(x'')| < \epsilon.$$

证明 必要性. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x: 0 < |x - a| < \delta$, 有 $|f(x) - A| < \epsilon$, 从而, $\forall x', x'': 0 < |x' - a| < \delta, 0 < |x'' - a| < \delta$ 同时有

$$|f(x') - A| < \epsilon, \quad |f(x'') - A| < \epsilon,$$

于是, $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < 2\epsilon$.

充分性 (\Leftarrow) 已知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'': 0 < |x' - a| < \delta$ 与 $0 < |x'' - a| < \delta$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

取某个数列 $\{a_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, a_n \neq a$. 根据数列极限定义, 对上述 $\delta > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n_1, n_2 > N$, 同时有

$$0 < |a_{n_1} - a| < \delta \text{ 与 } 0 < |a_{n_2} - a| < \delta.$$

从而有

$$|f(a_{n_1}) - f(a_{n_2})| < \epsilon.$$

根据数列柯西收敛准则, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$ (下证 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 从而 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在).

已知 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y: 0 < |x - a| < \delta$ 与 $0 < |y - a| < \delta$, 有

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = A$, 对上述 $\delta > 0, \exists n_0 \in \mathbf{N}_+$, 有 $0 < |a_{n_0} - a| < \delta$, 从而

$$|f(a_{n_0}) - A| < \epsilon.$$

取 $y = a_{n_0}$, 同时有

$$|f(x) - f(a_{n_0})| < \epsilon \text{ 与 } |f(a_{n_0}) - A| < \epsilon.$$

于是, 有 $|f(x) - A| \leq |f(x) - f(a_{n_0})| + |f(a_{n_0}) - A| < 2\epsilon$.

即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

柯西收敛准则也常被用来证明某些函数的极限不存在, 此时有如下描述:

极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \exists \epsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'': 0 < |x' - a| < \delta$ 与 $0 < |x'' - a| < \delta$, 有

$$|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$$

如在上例中, 我们可取 $\epsilon_0 = 1$, 对任何 $\delta > 0$, 令 $x' = \frac{1}{n\pi}$ 和 $x'' = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 只要 $n > \frac{1}{\delta}$,

就有 $x', x'' \in U^0(0, \delta)$, 而且有

$$\left| \sin \frac{1}{x'} - \sin \frac{1}{x''} \right| = 1 = \epsilon_0.$$

从而也说明 $f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.



第三节 两个重要的极限

一、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

证明 如图 2-3, \widehat{AB} 是以点 O 为中心, 半径为 1 的圆弧. 过 A 作圆弧的切线与 OD 的延长线交于点 B , 连接 AD .

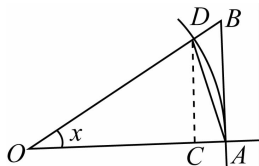


图 2-3

设 $\angle AOB = x(\text{rad})$, 则 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 显然有

$\triangle AOD$ 面积 $<$ 扇形 AOD 面积 $<$ $\triangle AOB$ 面积,

即 $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \tan x$ 或 $\sin x < x < \tan x$. 以 $\sin x > 0$ 除之, 得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \text{ 或 } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

由于 $\frac{\sin x}{x}$ 为偶函数, 根据偶函数性质, 上式对 $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ 时也成立. 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ 及函数极限的夹逼性定理可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

二、 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

证明 先证 $x \rightarrow +\infty$ 的情况:

$\forall x > 1$, 有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 从而

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

由幂函数(底数大于 1)的严格增加性, 有

$$(1 + \frac{1}{[x] + 1})^{[x]} < (1 + \frac{1}{x})^x < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x] + 1}.$$

又因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{[x]})^{[x] + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n + 1}$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n}) \\ &= e \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e.$$

根据夹逼性定理有 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

再证 $x \rightarrow -\infty$ 的情况. 令 $x = -y$, 则当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \\ &= e \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

该极限还可以换作如下形式:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

因为, 令 $\alpha = \frac{1}{x}$ 时, 则 $x \rightarrow \infty$ 与 $\alpha \rightarrow 0$ 是等价的, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

以上极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 和 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 是数学分析中非常重要的两个极限, 许多公式的

导出都离不开它们, 请牢记.

例 1 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

例 2 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

$$\text{解} \quad \text{由于} \quad \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$$



所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

例3 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 \\ &= e^2\end{aligned}$$

例4 求 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$.

解
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} [(1 - x)^{\frac{1}{-x}}]^{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 - x)^{\frac{1}{-x}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{-x}}} \\ &= \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

第四节 无穷小量与无穷大量

一、无穷小量

定义 2-4 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, 则称函数 $f(x) (x \rightarrow a)$ 是无穷小量.

该定义实质上指出了: 无穷小量是以零为极限的变量, 这里的极限过程 $x \rightarrow a$ 可以扩充到 $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ 等情形. 例如

当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 x^2 , $\sin x$, $1 - \cos x$ 都是无穷小量.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $\frac{1}{x^2}$, $\frac{\sin x}{x}$, 都是无穷小量.

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 数列 $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$, $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$, $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$ 都是无穷小量.

注 说某一变量是无穷小量必须注明是在什么极限状态下的无穷小量.

如 $y = \cos x$ 在 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时为无穷小量, 因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$, 但在 $x \rightarrow 0$ 时, 就不是无穷小量,



因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \neq 0$.

根据极限的定义或四则运算法则, 不难得出, 无穷小量有如下一些性质:

性质 1 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x \rightarrow a)$ 都是无穷小量, 则函数 $f(x) \pm g(x)(x \rightarrow a)$ 仍为无穷小量.

性质 2 若函数 $f(x)(x \rightarrow a)$ 是无穷小量, 函数 $g(x)$ 在 a 的某去心邻域有界, 则函数 $f(x)g(x)(x \rightarrow a)$ 仍为无穷小量.

如当 $x \rightarrow 0$ 时, x^2 是无穷小量, 而 $\sin \frac{1}{x}$ 为有界量, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$

性质 3 极限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) - A$ 在 $x \rightarrow a$ 仍为无穷小量.

二、无穷小量阶的比较

无穷小量是以零为极限的变量, 但它们收敛于零的速度也有快有慢, 下面我们考察 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在这一极限过程中的变化情况.

设 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为无穷小量.

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, 则表示当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 趋于零的速度比 $g(x)$ 快, 我们称当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 关于 $g(x)$ 是高阶无穷小量(或 $g(x)$ 关于 $f(x)$ 是低阶无穷小量). 记作

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x} = 0.$$

可表示为

$$1 - \cos x = o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

特别地, 当 $g(x) \equiv 1$ 时, $f(x)(x \rightarrow a)$ 为无穷小量, 可记作

$$f(x) = o(1) \quad (x \rightarrow a).$$

2. 若存在 $A > 0$, 当 x 在 a 的某个去心邻域中, 成立

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq A.$$

则称当 $x \rightarrow a$ 时, $\frac{f(x)}{g(x)}$ 是有界量, 记为

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

例如 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x \sin \frac{1}{x}$ 与 x 都是无穷小量, 且 $\left| \frac{x \sin x}{x} \right| \leq 1$, 从而有表示式

$$x \sin \frac{1}{x} = O(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

若又存在 E 数 λ 和 L 使得, 当 x 在 a 的某个去心邻域中, 成立

$$\lambda \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq L.$$

则称当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同阶无穷小量.



显然,若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b \neq 0$, 则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 必是同阶无穷小量, 此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 趋于零的速度“差不多”.

$$\begin{aligned} \text{例如} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以 $1 - \cos x$ 与 x^2 在 $x \rightarrow 0$ 时为同阶无穷小量.

甚至当 $f(x) = o(g(x))$ ($x \rightarrow a$) 时, 也有 $f(x) = O(g(x))$ ($x \rightarrow a$), 而且常用

$$f(x) = O(1) \quad (x \rightarrow a)$$

表示 $f(x)$ 是在某 $U^0(a)$ 内的一个有界量.

3. 若 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 趋于零的速度“基本相同”, 此时称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小量. 记作

$$f(x) \sim g(x) \quad (x \rightarrow a).$$

上式也可写成 $f(x) = g(x) + o(g(x))$ ($x \rightarrow a$), 它表示当 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 与 $g(x)$ 并不一定相等, 两者相差一个关于 $g(x)$ 的高阶无穷小量.

例如 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 说明 $\sin x$ 与 x 在 $x \rightarrow 0$ 时为等价无穷小量, 可表示为

$$\sin x \sim x \quad (x \rightarrow 0) \text{ 或 } \sin x = x + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

需要注意的是, 记号“ o ”、“ O ”和“ \sim ”都是相对于一定极限过程的, 一般来说, 在使用时应附上记号“ $(x \rightarrow a)$ ”, 以说明相应的极限过程, 只有在意义明确不会发生误解的前提下才能省略.

三、无穷大量

对于无穷大量的研究与无穷小量相对应.

定义 2-5 设函数 $f(x)$ 在 $U^0(a)$ 有定义, 若对于任给的正数 B 存在某一正数 δ , 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| > B$, 则称函数 $f(x)$ ($x \rightarrow a$) 是无穷大量, 有时也称函数 $f(x)$ 在 a 的“极限”是无穷大, 表示为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ 或 } f(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow a).$$

若将上述定义中的不等式 $|f(x)| > B$ 分别改为

$$f(x) > B \text{ 或 } f(x) < -B$$

则分别称函数 $f(x)$ ($x \rightarrow a$) 是正无穷大与负无穷大, 并分别表示为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ 或 } f(x) \rightarrow +\infty \quad (x \rightarrow a)$$



与 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 或 $f(x) \rightarrow -\infty (x \rightarrow a)$

在这三个“无穷大”的定义中,将 $x \rightarrow a$ 换为 $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ 以及 $n \rightarrow \infty$ 可定义不同形式的“无穷大”,请读者自行写出.

证明函数是无穷大,其证法与函数极限存在证明相同.

例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty$.

证明 $\forall B > 0$, 要使不等式

$$\left| \frac{1}{x-5} \right| = \frac{1}{|x-5|} > B$$

成立,解得 $|x-5| < \frac{1}{B}$. 取 $\delta = \frac{1}{B}$, 于是 $\forall B > 0$, $\exists \delta = \frac{1}{B} > 0$, $\forall x: 0 < |x-5| < \delta$, 有

$$\left| \frac{1}{x-5} \right| > B, \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} = \infty.$$

例 2 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

证明 $\forall B > 0$, 要使不等式

$$\frac{1}{x^2} > B$$

成立,解得 $|x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$. 取 $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$, 于是 $\forall B > 0$, $\exists \delta = \frac{1}{\sqrt{B}} > 0$, $\forall x: 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{B}}$, 有

$$\left| \frac{1}{x^2} \right| > B, \text{ 即}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

例 3 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, $a > 1$.

证明 $\forall B > 0 (B > 1)$, 要使不等式

$$a^x > B$$

成立,解得 $x > \lg_a B$. 取 $A = \lg_a B > 0$, 于是 $\forall B > 0$, $\exists A = \lg_a B > 0$, $\forall x > A$, 有 $a^x > B$, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$$

两个无穷大量趋于 ∞ 的速度也有快慢之分,与无穷小量有类似的定义. 特别地,设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均为 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大量,若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在某 $U(\infty)$ 内满足 $\lambda \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $x \rightarrow \infty$ 时的同阶无穷大量,对于 x 的其它趋向也同样可以定义同阶无穷大量.

需要注意的是,在进行无穷大量阶的比较时,习惯上不使用记号“ o ”但仍使用记号“ O ”和“ \sim ”.

根据无穷大量的定义,不难得出,无穷大量有如下性质:



性质 1 若函数 $f(x)$ 与 $g(x)(x \rightarrow a)$ 都是无穷大量, 则函数 $f(x)g(x)(x \rightarrow a)$ 仍是无穷大量.

性质 2 若函数 $f(x)(x \rightarrow a)$ 是无穷大量, 函数 $g(x)$ 在 a 的某去心邻域 $U^0(a, \eta)$ 有界, 则 $f(x) + g(x)(x \rightarrow a)$ 也是无穷大量.

注意 两个无穷大量的代数和可能不是无穷大. 例如, 指数函数 a^x 与 $-a^x(x \rightarrow +\infty, a > 1)$ 都是无穷大量, 但它们的和 $a^x + (-a^x) = 0(x \rightarrow +\infty, a > 1)$ 不是无穷大量, 而是无穷小量.

性质 3 若函数 $f(x)(x \rightarrow a)$ 是无穷小量(或无穷大量), 且 $f(x) \neq 0$, 则函数 $\frac{1}{f(x)}(x \rightarrow a)$ 是无穷大量(或无穷小量).

根据性质 3, 对无穷大量的研究往往可以归结为对无穷小量的讨论.

习 题 二

1. 判断下列几种叙述是否与 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 等价, 并说明理由:

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N, \text{有 } |a_n - a| \leq \varepsilon;$

(2) $\forall k \in \mathbf{N}_+, \exists N_k \in \mathbf{N}_+, \forall n \geq N_k, \text{有 } |a_n - a| < \frac{1}{k};$

(3) $\forall k \in \mathbf{N}_+, \text{只有有限个 } a_n \text{ 位于区间 } \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right) \text{ 之外};$

(4) 有无限多个 $\varepsilon > 0$, 对每个 $\varepsilon, \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}_+, \forall n > N(\varepsilon), \text{有 } |a_n - a| < \varepsilon;$

(5) $\forall \varepsilon > 0, \text{有无穷多个 } a_n, \text{使 } |a_n - a| < \varepsilon.$

2. 用 $\varepsilon - N$ 定义证明下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1;$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{7n - n^2} = -5;$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0;$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0.$

3. 证明: 数列 $\{2 - (-1)^n\}$ 发散.

4. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$, 反之是否也成立呢? 请举例说明.

5. 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = b^2$.

6. 证明: 若数列 $\{x_n\}$ 有界, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$.

7. 求下列极限:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000n}{2n+1};$ (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n^2 + 1}{4n^3 + 2n + 3};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2n}{n^2};$ (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}-9}{n+3};$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right);$ (6) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^5;$

(提示: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$) (提示: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$)



$$(7) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right); \quad (8) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n} - n).$$

8. 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

9. 应用柯西收敛准则证明下列数列(只给出通项)的收敛性.

$$(1) a_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n, \text{ 其中 } 0 < q < 1, |a_i| \leq M, i = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(2) x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!};$$

$$(3) a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

10. 用极限定义证明: 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = b - c.$$

11. 设 f 为定义在 $[a, +\infty]$ 上的递增函数, 证明: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有上界.

12. 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ 与 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = ab$.

13. 写出极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 存在的柯西收敛准则及其否定叙述, 并证明:

(1) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\frac{\cos x}{x}$ 存在极限.

(2) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $\sin x$ 不存在极限.

14. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 R 上是周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 则 $\forall x \in R$, 有 $f(x) = 0$.

15. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 5}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right);$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

16. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x}; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{4x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

17. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+3} \right)^x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x};$$



$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{1}{x}}; \quad (4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{-x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{mx} \quad (k, m \text{ 为整数}).$$

18. 已知下列极限, 确定 a 与 b :

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+1} - ax - b \right) = 0; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1} = 1.$$

19. 用不等式将下列符号的意义叙述出来:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty; \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty; \quad (3) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty.$$

20. 证明: (1) $2x - x^2 = O(x)$, $(x \rightarrow 0)$; (2) $\sqrt{1+x} - 1 = o(1)$, $(x \rightarrow 0)$;

(3) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$, $(x \rightarrow 0)$; (4) $\sin \frac{2}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $(x \rightarrow \infty)$.

21. 证明: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x+1}{x^2} = \infty$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$; (3) $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \tan x = +\infty$.

22. 证明: $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow a) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x))$.

23. 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} Q(x) = A$, 则

$$\lim_{x \rightarrow a} [P(x) + Q(x)] = +\infty.$$

24. 试确定 α 的值, 使下列函数与 x^α , (当 $x \rightarrow 0$ 时) 是同阶无穷小量.

$$(1) \sin 2x - 2\sin x; \quad (2) \frac{1}{1+x} - (1-x);$$

$$(3) \sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\sin x}; \quad (4) \sqrt[5]{3x^2-4x^3}.$$

25. 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ 任意数列 $\{a_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = +\infty$.