目 录

第一章 绪论

第一节 关于数学

一、什么是数学

德国思想家、哲学家、革命家弗里德里希·冯·恩格斯(Friedrich Von Engels,1820—1895)认为“逻辑是数学的青年时代,数学是逻辑的壮年时代”。他站在辩证唯物主义的理论高度,通过深刻分析数学的起源和本质,精辟地作出了一系列科学的论断。恩格斯提出:“数学是数量的科学”,“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”。结合恩格斯的观点,现在数学界比较普遍的观点是:数学既研究数,也研究形,是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学。早期的数学完全注重在演算实际运算的需要上。数学主要的知识首要产生于商业上计算的需要、了解数字间的关系、测量土地及预测天文事件。这四种需要大致与数量、结构、空间及变化(即算术、代数、几何及分析)等数学上广泛的子领域相关联。除了上述主要的关注之外,亦有用来探索由数学核心至其他领域上之间的联结的子领域:至逻辑、至集合论(基础)、至不同科学的经验上的数学(应用数学)、及较近代的至不确定性的严格学习。

(一)数学的分类

1.以时间为纵轴划分为初等数学、古代数学、变量数学、近代数学和现代数学

初等数学和古代数学,是指17世纪以前的数学。主要包括古希腊时期建立的欧几里得几何学,古代中国、古印度和古巴比伦时期建立的算术,欧洲文艺复兴时期发展起来的代数方程等。

变量数学,是指17—19世纪初建立与发展起来的数学。从17世纪上半叶开始的变量数学时期,可以分为两个阶段:17世纪的创建阶段(英雄时代)与18世纪的发展阶段(创造时代)。

近代数学,19世纪以后的数学被称为近代数学时期。这个时期是数学的全面发展与成熟时期,数学的面貌发生了深刻的变化,数学的绝大部分分支在这一时期都已经形成,整个数学领域呈现出全面繁荣的景象。

现代数学,是指20世纪以后的数学。1900年德国著名数学家希尔伯特(D. Hilbert)在世界数学家大会上发表了一个著名演讲,提出了23个预测和知道今后数学发展的数学问题,拉开了20世纪现代数学的序幕。

2.从关注主体进行横向划分:基础数学、应用数学、计算数学、概率统计、运筹学与控制论

基础数学(英文:Pure Mathematics)又称为理论数学或纯粹数学,是数学的核心部分,包含代数、几何、分析三大分支,分别研究数、形和数形关系,是专门研究数学本身的内部规律。中小学课本里介绍的代数、几何、微积分、概率论知识,都属于纯粹数学。纯粹数学的一个显著特点,

就是暂时撇开具体内容，以纯粹形式研究事物的数量关系和空间形式。例如研究长方形的面积计算公式，研究者不会关注它是长方形池塘的面积，还是长方形凹槽的面积，重点关注的只是蕴含在这类几何图形中的数量关系。

应用数学简单地说，即数学的应用，是一个庞大的系统，曾有学者提出，它是我们的全部知识中，凡是能用数学语言来表示的那一部分。应用数学着眼于说明自然现象，解决实际问题，是纯粹数学与科学技术之间的桥梁。大家常说现在是信息社会，专门研究信息的“信息论”，就是应用数学中一门重要的分支学科。

计算数学。研究诸如计算方法(数值分析)、数理逻辑、符号数学、计算复杂性、程序设计等方面的问题。该学科与计算机密切相关。

概率数学。分概率论与数理统计两大块。概率论和数理统计是一门随机数学分支，它们是密切联系的同类学科。但是应该指出，概率论、数理统计、统计方法又都各有它们自己所包含的不同内容。

运筹数学。运筹学是利用数学方法，在建立模型的基础上，解决有关人力、物资、金钱等的复杂系统的运行、组织、管理等方面所出现的问题的一门学科。

(二)数学的特征

数学的重要特征之一是高度的抽象性。数学理论都具有非常抽象的表现形式，这种抽象性大多是经历了不同发展阶段而逐步形成的，所以大大超过了自然科学中的一般抽象。而且我们要注意的是不仅数学概念是抽象的，连数学方法本身也是抽象的。例如，物理学家可以通过实验来证明自己的理论，而数学家则不能用实验的方法来证明定理，非得应用逻辑推理和相关计算来证明定理不可。现在，连数学领域中过去被认为是比较“具象直观”的几何学，其发展趋势也是朝向抽象性的。根据公理化思想，具体的几何图形不再是必须知道的必要信息，它是圆的也好，方的也罢，都无关紧要，我们甚至可以用桌子、椅子和啤酒瓶子来代替点、线、面，只要它们满足结合关系、顺序关系、合同关系，具备相容性、独立性和完备性，就能够构成一门几何学。

数学的另一个显著特征是体系的严谨性。整个的数学体系就是严谨的推理体系(又称演绎体系)，数学思维的正确性就是建立在逻辑的严谨性之上。所有数学现行的定理、公式，都是由一组公理(无法证明但却一定成立的基础结论)推出来的。在这过程中，只要有一点不严谨，就会被推翻。虽然严谨性是数学理论的基本特点，它会要求数学的结论表述必须精练、准确，对结论的推理、论证要步步有据，处处符合推理要求，但作为教学科目的数学却不能一味地追求严谨。关于小学阶段的训练基础，针对严谨性的要求就不能一蹴而就，需要注意循序渐进地进行，既要考虑数学的科学性，同时又要考虑教学的目的和学生的接受水平。

数学的最后一个显著特征是广泛的应用性。数学的最大特点是具有广泛的应用性。数学源于生活，又广泛应用于生活。在实际生活中运用所学数学知识处理实际问题是小学生的数学素养之一。20 世纪以来，随着应用数学分支的大量涌现，数学已经渗透到几乎所有的科学部门。不仅物理学、化学等学科仍在广泛地享用数学的成果，连过去很少使用数学的生物学、语言学、历史学等，也与数学结合形成了内容丰富的生物数学、数理经济学、数学心理学、数理语言学、数学历史学等边缘学科。各门科学的“数学化”，是现代科学发展的一大趋势。

二、数学的发展史

(一)世界数学的发展

数学，起源于人类早期的生产活动，为中国古代六艺之一，被古希腊学者视为哲学之起点。

第一个被抽象化的概念被认为是数字，史前人类对于两头马及两只羊之间具有的某样相同事物的认知是人类思想的一大突破。除了认知到如何去数实际物质的数量，史前人类也了解如何去数如日、季节和年等抽象物质的数量。点数的基础上算术（加减乘除）自然而然地产生了。古代的石碑向我们证实当时已产生了有关几何的知识。随着历史的进展，出现的关于税务和贸易等方面的相关计算需求，以及为了满足了解数字间的关系、测量土地、预测天文事件等应用需要，逐步形成了最早期的对数量、结构、空间及时间方面的数学研究。到了16世纪，算术、初等代数以及三角学等初等数学已大体完备。17世纪变量概念产生后，人们开始研究变化中的量与量的互相关系和图形间的互相变换。在研究经典力学的过程中，微积分的方法被发明。随着自然科学和技术的进一步发展，为研究数学基础而产生的集合论和数理逻辑等也开始慢慢发展。

（二）中国数学的发展

数学古称算学，是中国古代科学中一门重要的学科，根据中国古代数学发展的特点，可以分为四个时期：古数学萌芽期、数学体系形成期、数学发展繁荣期及中西数学融合期。

1.古数学萌芽期

最早的数字考古证据来自于仰韶文化时期出土的陶器，上面刻有表示1234的符号。西安半坡出土的陶器有用1～8个圆点组成的等边三角形和分正方形为100个小正方形的图案，这个时期的房屋基址都是圆形和方形。《史记·夏本纪》记载，夏禹治水时就已经开始使用规（画圆等的仪器）、矩（画直角或方形的工具）、准（定平直的东西）、绳（可以无限接续延长的索带）等作图与测量工具方便画圆作方，确定平直。商代中期的甲骨文中已产生出一套完整的十进制数字和记数法，其中最大的数字为三万；与此同时，殷人用十个天干和十二个地支组成甲子、乙丑、丙寅、丁卯等60个名称来标记60天的日期；发展到周代就把以前用阴、阳符号构成的八卦表示八种事物发展为六十四卦，表示64种事物。公元前一世纪的《周髀算经》中提到了西周初期如何用矩测量高、深、广、远的具体方法，并举例说明勾股形的勾三、股四、弦五以及环矩可以为圆等。《礼记·内则》篇提到西周贵族子弟从九岁起便要学习数目和记数方法。春秋战国之际，筹算（我国古代的计算方法之一，以刻有数字的竹筹记数、运算，约始于春秋，直至明代才被珠算代替）已得到普遍的应用，筹算记数法已使用十进位值制，这种记数法对世界数学的发展具有划时代的意义。战国时期的百家争鸣也促进了数学的发展，尤其是对于正名和一些命题的争论直接与数学有关。名家认为经过抽象以后的名词概念与它们原来的实体不同，他们提出“矩不方，规不可以为圆”，把“大一”（无穷大）定义为“至大无外”，“小一”（无穷小）定义为“至小无内”。还提出了“一尺之棰，日取其半，万世不竭”等命题。而墨家则认为名来源于物，名可以从不同方面和不同深度反映物。墨家给出一些数学定义，例如圆、方、平、直、次（相切）、端（点）等等。墨家不同意“一尺之棰”的命题，提出一个“非半”的命题来进行反驳：将一线段按一半一半地无限分割下去，就必将出现一个不能再分割的“非半”，这个“非半”就是点。名家的命题论述了有限长度可分割成一个无穷序列，墨家的命题则指出了这种无限分割的变化和结果。名家和墨家的数学定义和数学命题的讨论，对中国古代数学理论的发展是很有意义的。

2.数学体系形成期

中国古代数学体系形成于经济和文化迅速发展的秦汉时期，以《九章算术》为代表的数学著作的出现标志着这个时期里算术已成为一个专门的学科。《九章算术》是战国、秦、汉封建社会创立并巩固时期数学发展的总结，就其数学成就来说，堪称是世界数学名著。例如分数四则运算、今有术（西方称三率法）、开平方与开立方（包括二次方程数值解法）、盈不足术（西方称双设

法)、各种面积和体积公式、线性方程组解法、正负数运算的加减法则、勾股形解法(特别是勾股定理和求勾股数的方法)等,都具有很高水平。其中方程组解法和正负数加减法则在世界数学发展史上是遥遥领先的。就其特点来说,它形成了一个以筹算为中心、与古希腊数学完全不同的独立体系。成书于东汉初年的《九章算术》,排除了战国时期在百家争鸣中出现的名家和墨家重视名词定义与逻辑的讨论,偏重于与当时生产、生活密切相结合的数学问题及其解法,这与当时一切科学技术都要为当时确立和巩固封建制度,以及发展社会生产服务的社会发展情况是完全一致的。因此,《九章算术》就具有了以下显著特点:采用按类分章的形式呈现数学问题集;算式都是从筹算记数法发展起来的;以算术、代数为主,很少涉及图形性质;重视应用,缺乏理论阐述等。《九章算术》在隋唐时期曾传到朝鲜、日本,并成为这些国家当时的数学教科书。它的一些成就如十进位值制、今有术、盈不足术等还传到印度和阿拉伯,并通过印度、阿拉伯传到欧洲,促进了世界数学的发展。

3.数学发展繁荣期

这个时期为前后两期,分别以唐及宋元为代表。可以说是中国数学史的黄金时代,数学教育制度更臻完善,民间研究数学的风气很盛。数学成就归纳如下:

代数学上的成就:中国古代数学家很早就知道利用代数方法解决实际问题,这时期天元术的产生促使代数学向前发展,使其成为更完整的数学体系。其他数学也获得更进一步的发展。数学家们掌握天元术之后,很快地把它应用到多元高次方程组而产生所谓的四元术,并利用天元术开方。开方数也推广到多乘方,比西洋数学家的发现早约五百年。求数学高次方程的正根方法也已建立起理论根据。

几何学与三角学的成就:割圆术得到进一步的推广,除了平面割圆术外,球面割圆术也已产生,球面三角由此而初步建立起来。

数论上的成就:一次同余的理论基础扩大了应用范围,有八次联立一次同余式的问题出现,在整数论上是一个伟大的成就。所用解一次同余式的方法为有名的辗转相除法,即西方数学家所谓欧几里得算法。

级数论上的成就:级数论在世界数学史上有着悠久的历史,中算家所论述的在此中占有一定位子。由高阶等差级数研究中发明了招差数、垛积数。

纵横图说的研究:一些有名的纵横图(所谓方阵图)已经产生。

可以看出,有系统的代数学已建立起来,更多的数学方法与数学概念也得到更进一步的推广与发展。代表人物有:

刘徽(生于公元250年左右),三国后期魏国人,是中国古代杰出的数学家,也是中国古典数学理论的奠基者之一。其生卒年月、生平事迹,史书上很少记载。据有限史料推测,他是魏晋时代山东邹平人,终生未做官。在世界数学史上,他占有杰出的地位。代表作《九章算术注》和《海岛算经》,是中国最宝贵的数学遗产。刘徽思维敏捷,方法灵活,既提倡推理又主张直观。他是中国最早明确主张用逻辑推理的方式来论证数学命题的人。

祖冲之(公元429年—公元500年)是中国杰出的数学家、科学家,南北朝时期汉族人,字文远。祖冲之在数学上的杰出成就,是关于圆周率的计算。秦汉以前的古率是以径一周三作为圆周率,后来虽发现古率误差太大,知道了圆周率应是圆径一而周三有余,但究竟余多少争议很大,直到刘徽提出了计算圆周率的科学方法——割圆术,用圆内接正多边形的周长来逼近圆周长。刘徽计算到圆内接96边形,求得$\pi=3.14$。他指出,内接正多边形的边数越多,所求得的π

值越精确。祖冲之在前人成就的基础上，经过刻苦钻研，反复演算，求出 π 在 3.1415926 与 3.1415927 之间，并得出了 π 分数形式的近似值，取 22/7 为约率，取 355/133 为密率，其中 355/133 取六位小数是 3.141929，它是分子分母在 1000 以内最接近 π 值的分数。祖冲之究竟用什么方法得出这一结果，现在无从考查。祖冲之计算得出的密率，外国数学家在一千多年后得到了同样结论，因此有些外国数学史家建议把 π＝叫做“祖率”。

4.中西数学融合期

明初到清初，为中国算学衰落时期，统治者对数学教育不重视，民间研习数学风气不盛。

回回历法在元末明初输入中国，至明末，应用回回历法已近尾声。自利玛窦至中国之后，西洋历法、西洋数学也随之输入中国。当时还有人研究中算，但由于中算不如西算简明有系统，故中国古算陷入停顿状态而得不到新的发展。西洋数学输入的有笔算、筹算、代数学、对数术、几何学、平面及球面三角术、三角函数表、比例对数表、割圆术及圆锥曲线说。

著名的天元术停滞不前，珠算随着实际生活的需要而产生，很多有关珠算实用算数书陆续出版，珠算术的发明是中算的革命、我国的伟大成就。

清初的一些大数学家都致力于西洋数学的研究，编写了数学各科的入门书籍。

清乾隆至清末，西算输入告一段落。这时学术潮流偏向古典考证一路发展，数学研究也转到古代数学方面去，对算经十书与宋元算书加以传刻与研讨并到达最高峰。当时数学家很多都能兼通中西数学，在高等数学方面获得相当的成就。对圆周率解析法作深入的探讨，级数论、方程论及数论得到进一步的研究，理论更臻完善。对中算史加以研究与著成专书。数学教育制度重新建立起来。此期末，西方数学第二次输入中国，以补中算的不足，中国数学在此又进入另一阶段。

随着我国与国际的接轨，近代我国数学的国际化特征日趋显著，主要数学研究成果有：

数学家李善兰在级数求和方面的研究成果，在国际上被命名为“李氏恒等式”。数学家华罗庚关于完整三角和的研究成果被国际数学界称为“华氏定理”，另外他与数学家王元提出多重积分近似计算的方法被国际上誉为“华—王方法”。数学家苏步青在仿射微分几何学方面的研究成果在国际上被命名为“苏氏锥面”。数学家熊庆来关于整函数与无穷级的亚纯函数的研究成果被国际数学界誉为“熊氏无穷级”。数学家陈省身关于示性类的研究成果被国际上称为“陈示性类”。数学家周炜良在代数几何学方面的研究成果被国际数学界称为“周氏坐标”，另外还有以他命名的“周氏定理”和“周氏环”。数学家吴文俊关于几何定理机器证明的方法被国际上誉为“吴氏方法”，另外还有以他命名的“吴氏公式”。数学家王浩关于数理逻辑的一个命题被国际上定为“王氏悖论”。数学家柯召关于卡特兰问题的研究成果被国际数学界称为“柯氏定理”，另外他与数学家孙琦在数论方面的研究成果被国际上称为“柯—孙猜测”。数学家陈景润在哥德巴赫猜想研究中提出的命题被国际数学界誉为“陈氏定理”。数学家杨乐和张广厚在函数论方面的研究成果被国际上称为“杨—张定理”。数学家陆启铿关于常曲率流形的研究成果被国际上称为“陆氏猜想”。数学家夏道行在泛函积分和不变测度论方面的研究成果被国际数学界称为“夏氏不等式”。数学家姜伯驹关于尼尔森数计算的研究成果被国际上命名为“姜氏空间”，另外还有以他命名的“姜氏子群”。数学家侯振挺关于马尔可夫过程的研究成果被国际上命名为“侯氏定理”。数学家周海中关于梅森素数分布的研究成果被国际上命名为“周氏猜测”。数学家王戌堂关于点集拓扑学的研究成果被国际数学界誉为“王氏定理”。数学家袁亚湘在非线性规划方面的研究成果被国际上命名为“袁氏引理”。

三、关于数学教育

（一）什么是数学教育

数学教育是通过结合多种教育方法研究数学教学中的问题和现象，揭示数学教育规律，进行数学教学实践的一门学科。数学教育为一门独立的学科，其标志之一是 1908 年在罗马举行的第四届国际数学家大会（ICM）上，成立了国际数学教育委员会（ICMI），并从 1969 年起，每 4 年召开一次国际数学教育大会（ICME）。数学教育是一种社会文化现象，其社会性决定了数学教育要与时俱进，不断创新。

（二）数学教育的意义

1. 反映科学技术的进步

日本数学教育协会主席藤田宏教授认为，数学史上有三大高峰：公元前三世纪诞生的欧氏几何学；17—18 世纪微积分的发现和发展；现代公理化数学的起源。当代数学的统一的进步，包括计算机科学的进步，可以称为数学史上的第四个高峰。数学和科学技术的这些发展，反映在数学教育中。

2. 发展学生的数学能力

发展学生的科学素质，培养学生的数学能力，是数学教育的重要目标之一。推理能力是重要的数学能力，它与探索能力、实践能力相辅相成。巴西的努纳斯教授认为，在小学阶段，儿童能够通过利用数学工具，在解决问题的活动中进行学习，并建立起符合他们年龄特征的推理系统；相反，如果儿童学习有关数学工具，但不把它结合到推理活动中，那么，他们解决问题的思维就将受到束缚。

3. 培养学生的学科意识

数学符号是必不可少的语言。它是人类思维与交流的工具，它能够清晰而简明地表达数学思想和规律。数学符号涉及多个数学分支，在科学技术中，利用数学符号，能有效地寻求模式，进行概括。借助于数学符号，能把有关问题规范化。因此，数学课程会帮助学生树立正确的学科观念，建立正确的符号意识。

（三）小学数学教育的价值

小学数学教育的终极价值，从根本上来说，不在于或主要不在于培养未来的数学家，而在于培育人的数学思想和解决问题的方法，开拓头脑中的数学空间，进而促进人的全面发展和提高。具体而言，义务教育阶段的数学教育“强调从学生已有的生活经验出发，让学生亲身经历将实际问题抽象成数学模型进行解释与应用的过程，进而使学生获得对数学理解的同时，在思维能力、情感态度与价值观念等多方面得到进步与发展”。

1. 拓展学生的智能结构

由数学教育所培养和形成的人的素质中的主要组成部分之一是智能结构。当我们通过数与计算、空间与图形、量与计量、统计与概率、方程与关系、运筹与优化各个领域的学习，引领学生进行观察、发现、了解现实世界的做法，有效地促使学生充分学习和掌握科学研究的基本方法，例如认真观察实验、大胆尝试猜想、小心合情推理、严格推导论证等，建立和增强数学意识如化归意识、抽象意识、推理意识、符号意识、量化意识等。思维品质是智能素质的内核。数学思维的基本成分可分为具体思维、抽象思维、直觉思维、函数思维等四种基本类型。这些品质比较

全面地体现了逻辑思维、形象思维、直觉思维及辩证思维的主要特性。学生的思维品质可以通过经常性的数学思维训练得以改善和提高。优秀的思维品质表现为思维的灵活性、严谨性、批判性、广阔性及创造性。思维的灵活性表现为不过多地受思维定式的影响，能准确地调整思维的方向，善于从旧有的模式或传统的思维轨道上跳出来，能做到另辟蹊径，曲径通幽。我们在数学教育中提倡一题多解，就是培养学生思维灵活性的一条有效途径。思维的严谨性表现为考虑问题缜密有据。数学中，问题的解决允许运用直观的方法，但应当鼓励学生不停留在直观的认识水平上，可以运用合情推理，但要加以精密计算、逻辑论证。正确地使用概念，完整地解答问题等都体现出思维的严谨性。思维的批判性是指对已有的数学表述或论证敢于提出自己的看法，不是一味盲从。思维的广阔性是指对一个数学事例能作出多方面的解释，对一个数学问题能用多种形式表达，对一个问题能用多种不同的方法加以解决。思维的创造性是指思维活动的创新程度，表现为分析、解决问题时的方式、方法和结果的新颖、独特。善于发现、解决并延伸问题，是创新思维的一种体现。这些良好思维品质的形成，必将逐步提升为一种创新意识和创造能力，而这些品质和能力正是我们教育工作者所追求的目标。

2.数学教育的科学素养价值

数学教育的科学素养价值，是指数学教育对形成人的科学素养（如科学意识，科学思想、方法，科学精神，科学态度，科学品质）的意义和作用。数学教育之所以具有这种价值，是因为数学仍保留着科学的许多特性。无论是实证方法、理性方法、臻美方法，还是科学发现中的类比推理、合情推理、直觉和灵感，无不与数学的发现方法和模式完全相同和一致。

四、数学教育现状

（一）国外数学教育现状

1.美国小学数学教育现状

美国的数学教育自本世纪50年代至今，一直处于变革之中。50年代末、60年代初，美国在中小学中广泛开展了“新数学”教育运动，这次改革虽然强调培养学生能力，但忽视了数学基础知识的教学和基本技能的训练，结果以失败而告终。70年代，美国又掀起了一场“回到基础”的运动，这场运动同样不能挽救美国数学教育落后的局面。进入80年代，美国教育界为适应信息时代社会高速发展的需要，在数学教育方面进行了一系列新的改革，提出数学教育要使学生“为估价数学而学习，为数学推理而学习，为数学交流而学习，对于自己从事数学活动的能力有信心，成为数学问题的解决者”。这是美国数学教师协会（NCTM）在1989年3月制订的有史以来第一个国家统一的《学校数学课程与评价标准》中提出的全美学校数学教学目标。我们从其制订的目标，就可以分析出美国小学数学教学的基本特征。

(1)重视基础知识和基本概念的教学

美国的数学教育经历了数次变革之后，他们深刻认识到美国小学生在数学基础知识和基本概念方面与其他国家之间存在的差距。因此，1989年由美国国家委员会公布了《人人关心——数学教育的未来》的专题报告，该报告指出：“美国要振兴数学教育，要对所有学生进行高质量的数学教育。”“学校数学要选取为所有学生发展所需要的数学中重要的核心部分。”因此，对小学数学的教学内容进行了增删，教材中加强了基本数概念、简单的运算和计算、几何基础知识和测量内容、概率和统计、计算器（机）知识、解决生活中的实际问题、数学实践活动等有关内容。这些内容都是学生将来步入社会所必备的基础知识和基本技能。美国的教师们普遍认为：学生

的数学素质是以数学基本知识和基本技能为基础的。数学的课程内容应使学生重视对数学的理解，保持对数学的欣赏和好奇心，使学生带着这种欣赏和好奇去探索数学的基本规律，并成为一个懂数学的人。

作为美国的小学数学教师，首先，要明确小学数学基础知识的范围和教学要求。教师都要建立这样的教学观念：面向全体学生，使所有学生都能学好数学，理解基本的数量关系，建立初步的空间观念，重视基础知识的学习与基本技能的训练。教师不应局限于课堂讲授，要引导学生进行探讨、操作、交流、开展多种数学活动，培养学生的思维能力、交流能力和探究能力。在不增加学生负担的前提下，向学生传授必要的新知识和新概念，使学生了解广泛的数学知识。比如概率和统计知识、测量知识、计算器(机)知识。其次，要改革基础知识的教学方法。

(2)强调数学教学中的问题解决

美国从 80 年代起，就非常重视问题解决。美国数学教师协会 1980 年颁布的《行动议程》中的第一项建议就是："问题解决必须成为学校教学的核心"。在最新的课程标准中，它也是五项教学目标之一，同时也是其 13 项课程标准中居于首位的标准。作为解决问题的教学，要使学生能够：通过解决问题的探讨去调查和理解数学内容，从日常生活和数学情境中提出问题，应用策略去解决广泛的各种各样的问题，对原始问题的结果进行检验和解释，在有意义地运用数学中获得自信。

教师们认为：解决问题是所有数学活动中最重要的部分。解决问题是一个发现的过程、探索的过程、创新的过程。通过问题解决，使学生体验到数学在其周围世界中的作用。因此，问题解决的主要教学目标是引导学生掌握解决问题的策略。这些策略包括学具的使用、尝试和改错的方法、图表的运用、寻找模式等。问题解决大都采用开放性的题目，一般模式是从问题情境出发，具有一定的趣味性，它能为学生提供数学想象，诱发学生的创造力，鼓励学生的发散思维。例如，学习加法时，老师会创设这样的情境"在我的口袋里有一些 1 分、5 分和 1 角的硬币，我拿出 3 个硬币放在手里。你认为在我的手中有多少钱?"，面对这个问题学生可以采用尝试的策略，使用真的硬币来操作验证，然后在教师的指导下制成表格。学生在提问、思考、讨论和探索中成功地解决问题，使他们获得了自信，培养了学生探究的积极性，发展了数学交流的能力和发散思维的能力。

(3)强调数学应用，引导学生参与数学活动

美国数学教学非常重视数学知识的实际应用，强调问题的解决要有必然的联系性。在这一教学目标的指引下，美国针对数学教学内容和教学方法进行了最近一次的改革。

教学内容方面的改革在于，对传统教学内容进行改进，增加现代数学中应用广泛的教学内容，如统计等知识。同时也选择了一些学生生活中经常接触到的知识，如：价格和购物，钟表与时间，旅行与行车时刻表、行程路线，生活用品中各种物体的面积、体积的计算，邮资与邮价表等。同时，要求学生对某些生活中常见的现象进行估测、估算，按生活实际的需要取近似值(四舍五入)。

教师们认为：数学的学习必须是一个主动的过程，应让学生主动地参与到数学实践活动中去。教师会组织学生到商店观察购物情况，然后回到教室内进行角色扮演，开办"小商店"，让学生在实际购物活动中学习四则计算知识。当学生学习度量知识时，教师会为学生提供一些度量的器具，让学生亲自测量并计算书本的重量、全班同学平均身高、教室的面积等。学生通过主动地参与数学实践活动，既知道数学知识从何而来，又知道它将走向何方。

(4)促进教学中的数学交流

数学之所以在信息社会应用广泛，重要的原因之一就是数学能够用非常简明的方式，经济有效地、精准确切地表达和交流思想。因此，美国在《学校数学课程与评价标准》中提出了“为数学交流而学习”。交流可以帮助学生在他们的非正式的、直觉的观念与抽象的数学语言、符号之间建立联系。

描述、探索、调查、倾听、阅读和书写是交流的技能。数学教学中的交流，既有师生间、生生间的交流，也有学生与社会的交流。美国教师特别重视为学生创设交流的情境，提供“数学对话”的机会，鼓励学生积极用耳、口、眼、手来表达自己的思想和接受他人的思想。因此，在教学中他们会组织学生开展小组内交流和全班交流活动，也鼓励学生在社会生活中与家长、与朋友交流学习数学的感受，交流对数学的态度。美国教师常常鼓励学生记日记、写书信，记录今天学习了什么内容？哪部分最难？哪部分最容易？最喜欢哪些内容？我做了哪些学具等。然后在课堂上交流学生所写的日记和书信。这样，教师就可以及时地获得教学反馈信息，作出有根据的教学决策，这种做法有效地促进了学生对数学知识的理解与交流。

(5)注重数学思想方法的教学和数学素养的提高

信息社会直接用到学校数学所教的知识将会越来越少，关键是让学生从小就受到数学思想和方法的熏陶和启迪，提高数学素养。美国教育界认为，数学素养主要指独特的数学能力，它既包括探索、猜想和逻辑推理的能力，也包括有效地利用多种数学方法进行问题解决的能力。

数学的思想方法包含有：比较分析的方法、模型方法、估测方法、推理方法、转化方法、统计方法等。在小学数学教学中，这些数学思想方法都是通过解决实际问题而出现的。因此，教师总是创设一定的问题情境，课堂中充满着研讨、探究、思考的气氛。在美国，教师更注重的是学生推理和解题的方法而非问题的正确答案，教师鼓励学生用各种各样的方法证明他们的答案、思考的过程和推测的结果。

2.荷兰小学数学教育现状

在欧美国家中，荷兰的数学课程是较有特色的，最大特色就是现实主义数学教育的理念和实践，这一基本特点已经获得了许多国家的认同，逐步成为国际数学教育的一个基本趋势。在现实数学思想的影响下，荷兰进行了一系列数学课程改革，逐步形成自己的特点。荷兰的数学课程没有像欧美大多数国家一样追求多元化，相反荷兰的数学课程是比较统一的，几乎所有的学校都在使用基于现实数学教育理念统一编写的数学课程。因此，荷兰学生的基础知识与技能也是比较好的。荷兰的数学教育与弗兰登塔尔(Freudenthal)的现实数学教育思想密切有关。弗兰登塔尔认为：数学的根源在于普通的常识，是普通常识的数学化。从数学这一基本性质出发，弗兰登塔尔提出了现实数学的思想。这一思想表明：第一，学校数学是现实的数学性质，数学来自于学生的现实生活，再运用到现实生活中去。第二，学生应该用现实的方法学习数学，即学生通过熟悉的现实生活自己逐步发现和得出数学结论。

荷兰最新的数学课程标准在内容上作了调整，使之更符合现实数学的基本观点。在小学阶段更加注重心算和估算，降低了形式化运算的要求；学生只需结合情景问题计算分数问题，实现的直观几何被正式纳入小学数学课程内容，可以在小学课程上使用计算器等等。新的课程标准目标分为学科目标和跨学科目标(cross－curricular attainment targets)，学科目标包括了一般性目标和具体课程目标。跨学科目标是任何一门课程都应当指向的目标。跨学科目标在课程标准中具有较高地位，反映出荷兰数学课程的一个特色。跨学科目标与一般性目标紧密关联，

它是整个课程目标的核心。

(1)跨学科目标

在小学阶段，荷兰数学教育跨学科目标具体分为6个方面：工作态度；按计划工作；运用多种学习策略；自我认识；社会行为；信息技术。

(2)一般目标

荷兰数学教育跨学科目标与数学课程的一般性目标是密切配合的。小学数学课程的一般目标是：建立数学与学生日常生活的联系；获得基本的技能，懂得基本的技能，懂得简单的数学语言，并能应用于实际情形；对自己的数学活动进行思考并能对这些活动结果的正确性作出检验；认识和探索简单的关系、规则、模型和结构；描述探究的过程和用自己的语言进行推理并应用他们。

3.德国数学教育现状

德国是联邦制国家，各州在教育立法、教育行政管理上享有很大权力，相关课程由各州文化部自行决定，教材则在国家规定的十几种教材中选择，相关教育资源可以根据选择从网上下载。上课形式可能是教师指定课题研究，也可以是学生自己选定课题进行专题研究性学习，而非全部由教师讲授。德国教育基本是国家教育，教育整体置于政府监督之下。在德国年满6岁的儿童必须依法上学，小学只有4年，班额在10人左右。小学阶段的数学教育重点是培养学生基本的读写算能力，注重学生个体全方位的发展。

(1)重视直观材料的使用

德国小学生学习数学要有亲手触摸的材料。比如：面对数量不超过5个的杂乱无序的排列时，一般人能瞬间说出所有观察对象的特征。当面对的观察对象有组织(线型或方块状)时，就大不一样了。德国小学阶段重点要训练对10、5的数量的反应。

题型举例1：出示百格图，上面依次表上1～100自然数，先观察数据排列特征，解读规律。然后教师遮住数据，学生说出遮住的数据是几。可以遮盖单个数据；遮盖方块状的9个数据；遮盖“回”型数据(露出中间4个数据)；遮盖“十”字状的数据等。

对学生的要求，优生要完全想象，其他学生可以具体操作。

题型举例2：脱离百格图，出示“俄罗斯方块”状的中间表示一些数据，请学生填空。

题型举例3：记住百格图中65的位置，先往左移动4格，再往下移动3格，再往右移动6格，再往上移动5格，这时的数据是多少？(可能用箭头图示，也可能简单些)

对学生的要求，优生要完全想象，中等生可以看着百格图想，差生可以具体操作。

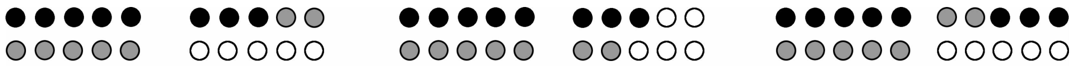
(2)重视数形结合思想的渗透

“数”与“形”密不可分，它们相互转化，相辅相成。数形结合是常用的数学思想方法。在课堂教学中适当地利用数形结合，把握好数形结合之度，就可以使问题化难为易，化繁为简。

题型举例1：两位数加一位数的进位加法，比如35＋7，附上空白的百格图(十进制计数法的算理)，要求学生涂一涂——涂格子是计算的助手。为避免学生先计算后涂格子的现象发生，德国教师调整数形结合的措施是35和7分别选用两种颜色，分步呈现计算过程，放慢教学步伐。

题型举例2：当进行两位数减一位数的退位减法时，比如24－6只要一种颜色即可，可以用画线表示减法，但也要分步呈现。

题型举例3：一位数加一位数的进位加法，善于将学生的想法用图示表示出来。比如：8＋7。



8+7=8+2+5　　　　8+7=5+5+3+2　　　　8+7=7+3+5

题型举例 4：两位数加减两位数，德国教师善于运用数轴辅助教学，回归到加减法的本质后进行教学。比如：70－38＝70－30－8，70－38＝70－40＋2，教学中重视图式与算法的沟通。

(3)重视计算教学

德国的计算也提倡算法多样化，但计算要求远低于我国。竖式笔算是必会技能，其他算法学生可创造性使用，相当于我们的优化算法。在竖式教学中，教师会结合横式和图式让学生理解竖式计算的算理(学生可用圆片摆出来)。

题型举例 1：347＋456 学生自由计算的方法有：347＋6＋50＋400，347＋3＋50＋400＋3；347＋53＋403；350＋450＋3；340＋450＋7＋6；300＋400＝700，40＋50＝90，7＋6＝13，347＋456＝803。

面对学生的多样算法，教师会追问：怎样算？为什么这样算？

(4)教学形式的趣味性和多样化

德国的小学数学教学在引发培养学生的学习兴趣方面十分重视。比如：简单的加减计算的练习形式就有数字墙、多米诺练习、费尔尼习题、形式多样的幻方等。

(三)中国数学教育

1.古代中国的数学教育

数学教育在中国有悠久的历史，早在西周时期，数学已作为“六艺”之一，成为专门的学问，唐初国子监增设算学馆，设有算学博士和助教，使用李淳风等编纂注释的《算经十书》为教材。明代算科考试亦以这些教材为准。

2.近现代的初等数学教育

可以说是在晚清(1903)颁布癸卯学制，废除科举后，才开始兴办小学、中学。当时小学设算术课，中学设数学课(包括算术、代数、几何、三角、簿记)。民国初年(1912—1913)公布壬子癸丑学制，中学由五年改为四年，数学课程不再讲授簿记。执行时间最久的是 1922 年公布的壬戌学制，将小学、中学都改为六年，各分初高两级，初小四年，高小二年，初高中皆三年。中华人民共和国成立后，对中小学的教育进行了改革，学制大都改为小学六年。数学教育在数量和质量上都发生了显著变化，逐步发展提高。但也存在一些问题，如：必修课太重，不少课程要求过专过高，教学制度要求过分划一，未能因材施教，导致学生学习负担过重，基础不牢，加上对理论和实践有时理解得不全面，工作中有摇摆，使数学教育的发展受到影响。尽管如此，这段时期的数学教育成就还是很大的，一般数学人才的培养已能立足于国内了。

从 1966 年开始的“文化大革命”，数学教育受到严重挫折。1977 年后，经济、政治、科学、教育各方面都先后提出了改革的方针和措施；实事求是精神的发扬，学校自主权的加强，教学制度的灵活，选修课的增加，使各校有条件分别发扬其优势，形成自己的特色。由于明确提出了“大力发展应用研究，重视基础研究”的方针，纯粹数学和应用数学各得其所，长期存在的关于理论和实践关系的认识分歧终于澄清。

3.当代小学数学教育现状

当代小学数学教育进入了百花齐放的时期，具体相关内容在后续章节中将详细展开，此处

不作说明。

五、关于数学教学法

数学教学法(teaching method of mathematics)是研究数学教学的原理和方法,分科教学法之一。数学教学法是随着师范教育的兴起而产生、形成和发展的。1904 年 1 月 13 日,清政府颁布的《奏定初级师范学堂章程》中规定:在算学教学中兼教算术及几何代数之次序方法。同年颁布的《奏定优级师范学堂章程》,把包括算学教授法在内的各科教授法列为必修课。辛亥革命后,随着师范教育的发展,数学教学法形成独立的学科。中华人民共和国成立后,在高等师范院校数学系科里,普遍设有数学教学法课程,并编写了一些教材。

(一)产生与运用

20 世纪 50 年代末 60 年代初期,在现代科学技术突飞猛进、教学方法和计算机广泛应用的现实情况下,各国在广泛的范围内开展了研究和实验工作,掀起了一个以数学教学现代化为中心的国际性的数学课程改革运动,国际上称之为数学教育研究。与此同时,出现了一批数学教育的研究组织,出版了一些数学教育研究杂志。在这种情况下,数学教学法得到了进一步发展和充实。在这个研究领域里,引起普遍注意的课题有 3 个互相联系的方面:第一,对课程、方法和物质条件的研究。例如为达到数学教学的最佳效果,应如何创造合适的体系;怎样使数学内容现代化;怎样进行几何教学;如何通过使用计算器和计算机来增进学生对数学的理解,提高学习效果等。第二,对学习和学习者的研究。要建立数学学习的理论;研究人怎样学习数学,以及学习数学的过程等。第三,对教学和教师的研究。主要是建立数学教学理论,研究怎样教人学习数学,怎样在教学过程中不断培养和提高学生的理解和思考能力;如何培养学生的智力和对数学的敏捷反应,如何培养学生学习数学的正确态度和学风等。

(二)意义

1.改革数学教学方法的需要

长期以来,对于数学教学改革的研究偏重于对教的侧面,但是对于学生是如何学的,学习活动是如何安排的层面研究较少。现代教学理论认为,教学方法包括教的方法和学的方法,正如前苏联教学论专家巴班斯基指出的那样:“教学方法是由学习方式和教学方式运用的协调一致的效果决定的。”即教学方法是受教与学相互依存的教学规律所制约的。

当前,教学方法改革中的一个新的发展趋势,就是教法改革与学法改革相结合,以研究学生科学的学习方法作为创建现代化教学方法的前提,寓学法于教法之中,把学法研究的着眼点放在纵向的教法改革与横向的学法改革的交汇处。从这个意义上讲,学习方法指导应该是教学方法改革的一个重要方面。

2.培养学生学习能力的需要

埃德加富尔在《学会生存》一书中指出:“未来的文盲不再是不识字的人,而是没有学会怎样学习的人。”“教会学生学习”已成为当今世界流行的口号。前苏联教育家赞可夫在他的教学经验新体系中,把“使学生理解学习过程”作为五大原则之一。就是说,学生不能只掌握学习内容,还要检查、分析自己的学习过程,要学生对如何学、如何巩固加以关注,并学会进行自我检查、自我校正、自我评价。学习方法指导的目的,就是最大限度地调动学生学习的主动性和积极性,激发学生的思维,帮助学生掌握学习方法,培养学生学习能力,为学生发挥自己的聪明才智提供和

创造必要的条件。

3.满足学生为主体的需要

我国著名教育家陶行知先生说过："我以为好的先生不是教书，不是教学生，乃是教学生学。"美国心理学家罗斯认为："每个教师应当忘记他是一个教师，而应具有一个学习促进者的态度和技巧。"专家学者精辟地阐述了学生在整个教学过程中始终是认识的主体和发展的主体的思想，强调了学习方法指导中以学生为主体的重要性。教师在教学过程中的作用，只是为学生的认识的发展提供种种有利的条件，即帮助、指导学生学习，培养学生自学的能力和习惯。

（三）研究方法

数学教学法既是一门理论学科，又是一门实践性很强的学科。它的研究方法一般有两种：第一，总结行之有效的先进的数学教学经验，上升到理论高度，而后用于指导数学教学实践。第二，针对目前仍存在的问题，开展调查研究，设计解决问题的最佳具体方案，进行典型试验，再总结经验逐步推广，最后上升到理论。数学教学法目前较多是研究中小学数学教学法，高等学校数学教学法的研究还处于开创阶段。

第二节　数学教育观念的综述与分析

一、数学教育观念的综述

（一）严格训导的数学教育观

数学知识被看做是由权威去粗取精确定下来的具有清晰体系的事实和技能，与其他领域中的知识相比较，完全是中性的，不存在社会争执性问题，评判结论可用"对与错""好与坏"来勾画。因此通过数学教育不仅可以培养学生的数学能力，而且可以培养学生劳动和勤奋的品质，使其养成遵从法则的习惯，避免学生懒惰的不良习性，也就能很好的实现培养人的条理性、自律性、服从性以及敬业精神等品格的社会需要。

提倡严格训导的数学教育观认为能力由遗传因素所决定。曾流行的看法是：人的大脑是一张"没有文字的白纸"，有待我们在上面书写勾画；儿童是具有能力差别的空桶，应由教育填入适当的东西，否则会滋生垃圾。这就是所谓的"白纸"观或"空桶"观。因此，严格训导数学教育观认为，书面习题练习和机械学习都是重要的，教师要对学生实施严格的纪律约束，通过传授数学知识，最终培养学生刻苦、勤奋及自律等好品质。

类似学校要"以严治学""教师要具有威严、威信，保证学生记住最重要的东西"等说法都是这种教育观念的表现。显然，这样的教育观是"以教师为中心"的。也就是说，"重要的是教师的质量，而不是他们的设备"。

严格训导数学教育观反对过分强调教师使用教具，尤其要限制计算器的使用，认为计算器会使复杂的计算变得容易，会限制学生计算能力的发展。反对使儿童逃避必要的艰苦劳动的行为，认为儿童中心、探究教学及计算器使用均能导致儿童的随心所欲、懒惰。

严格训导数学教育观反对讨论和合作学习，认为这种做法容易掺假，提倡使用目标简洁明了的考试去检查学生正确运用知识的能力。即学生以正确的方式通过考试，才是数学学习的目

的。但考虑到儿童生来数学能力的不同，允许儿童的进步速度不同。对于大多数学生而言，数学教育的目的是掌握基本技能，为适应劳动生活做好准备；对于少数精英学生而言，数学教育的目的是掌握广泛知识，接受成为统治阶级的训练，为将来的职业和生活角色做准备。

（二）技术实用主义的数学教育观

一方面，19 世纪后期，科学技术逐渐成为促进社会和文化发展的主要因素。特别是 20 世纪 50 年代以后，社会对未来劳动者有一定技术知识的需求，迫使教育要进行改革；同时，各国普及教育年限的延长，使得教育加大技术实用内容成为可能。另一方面，数学具有解决实际问题的功效，在现代社会生活中表现得更加经常与直接。尤其是应用数学的迅猛发展，进一步突出了数学实用性的本质。例如时间的估计、钱财的计算；从事各种职业的人们为了工作或把工作做得更好，可能需要简单的计算技能甚至微分求极值这样复杂的内容。基于此，19 世纪末 20 世纪初，由德国数学家克莱茵和英国数学教育家贝利在英国发起并领导的数学教学改革（又称为克莱茵—贝利运动）提出，“数学教育必须重视应用”，强调实用的问题。1982 年，英国公布的 Cockcroft 报告全面论述了工业社会中学生需要掌握的数学，明确表现出技术实用目的的观点。当前的数学教育特别强调问题解决，认为数学建模是培养学生问题解决能力的重要途径；计算机数学、统计、概率、线性规划、运筹分析等应用数学的内容被越来越多地引进数学课程，充分说明了技术实用主义对今天的数学教育的重大影响。数学教育内容从过去主要的纯数学，逐渐向“以问题为导向的应用数学”转变的趋向表明，技术实用主义数学教育观的影响一直延续至今。

技术实用主义数学教育观认为数学能力先天固有，但需要通过数学教学才能实现其潜能，认为儿童是等待砥砺锋刃的“钝器”。该观点重视儿童的经验，视经验为儿童潜在的技能以及适应未来就业的源本。认为教给学生适当水平的数学，满足其成人就业时的需求是教育的根本任务。相应的数学教育目的体现在：使学生具有就业需要的数学知识和技能；确定学生的数学成绩，以便就业选择；通过全面技术培训，进一步使学生掌握技术知识，如电脑和信息技术。对教学的看法是：强调技能教学，认为激发学生学习的核心在于“教学艺术”，即技术与教育相适应的教学；同时认为数学学习类似“跟师傅学徒”，知识和技能的获得要来自实践经验，如要精通建模必须充分实践。

（三）旧人文主义的数学教育观

智力活动从体力劳动中分离出来后就与权力阶级、上流社会紧密相关，教育也就成为了精英教育。精英教育的目的是传播纯知识、高层文化，造就文化教养之士，使少数社会精英人物具有高雅的精神面貌、道德水准以及美学修养等统治阶级所需的品质。同时，由于数学是精英或少数天才的产物，具有理性中的简洁性、清晰性、纯粹性和客观性，被认为是人类的最高成就、文化的核心、“科学的皇后”、绝对真理的完美结晶，是培养人的智力的最好学科。例如“数学是思维的体操”“数学是智力的磨砺石”等说法，就是该观点的代表。

旧人文主义的数学教育观是建立在以数学的知识结构和数学家的价值为中心基础之上的“数学中心观”。视推理、理性和逻辑为认识的核心，强调数学文化的价值远远高于实际应用的价值，只开展纯数学知识角度的讨论，对数学的应用价值不做考虑。只重视数学知识、文化和内在的价值传播；强调数学结构、概念层次和严密性；要求学生经过深入的学习，理解并欣赏纯数学的美及美学价值。

把纯粹数学当做数学教育的核心，轻视实用和应用数学的具体表现是：教学往往选择体现

数学高度抽象与逻辑严密特点的内容。例如：为服务纯数学，教材中会选用直尺和圆规作为作图工具；仅限于掌握了基础概念的高年级学生使用计算器和计算机；认为参加实践活动、进行考察是一项实际的工作，不适于学习纯数学的学生，只适于不学习“真正”数学的差生。基于数学广泛的应用性不过是其高度抽象性与逻辑严密性的一个必然结果而已的认识，旧人文主义教育观指导下的教材内容组织体系的要求是：从大纲到教材以及课堂教学过程中，内容的取舍、编排顺序等都强调以数学的逻辑体系为主线；列举实例不过是为了帮助学生领会、理解抽象的数学概念，或者是为了验证逻辑演绎建立起来的数学理论的威力（理论之后的简单应用），让学生了解理论的来龙去脉而已。

这种数学教育观以纯智力衡量数学才能，认为数学素质先天固有。成功的数学学习是将纯数学概念结构内化的学习：了解逻辑关系下概念和性质的层次系统，数学思想方法，窥见数学的组织结构；正确学习包括解决数学问题和难题的数学知识；要求学生根据自己的才能和灵性，通过运用数学知识掌握不同的方法和策略，以及与此相关的思维模式；评价数学学习既可以采用形成性评价，也可以采用总结性评价。教学只不过起帮助学生发挥自己固有才能，使其“数学潜能”表现出来的作用。认为数学能力存在等级，顶端是数学天才，底部是数学低能者，因此学校应按数学能力分班：使数学天才学习数学的精华内容，以便将来成为纯粹数学家；学不好数学的人学习少量的知识，只要达到数学能力水平较低的程度即可。教师的作用在于采用多种方法有意义地讲授、解释数学结构，采纳课本组织的结构，用生动的语言激发学生，并用课外问题和活动丰富数学教学，帮助学生学习和理解数学。鼓励学生根据个人的数学能力水平努力攀登数学的较高水平，以便不断接近“真正”的数学。

（四）进步的数学教育观

进步的数学教育观认为儿童时代是生活的美丽部分，儿童有权利自然愉快地生活，他们是“纯真、蒙昧的人”，就像“生长的花朵”一样，应免遭摧残，需要在培养、保护和多种经验中充分发展自己的潜能。学校要成为儿童想来上学的愉快场所，在制订学习目标上就不应把社会目标和价值强加给儿童；应精心创设适宜的环境，让每个儿童以自己的方式、速度、时间自由地、自然地发展，创造性地释放其能力。同时，数学知识是个人经验综合的结果，不可以分割。其胚芽或形态在人脑中生成，在经验成熟过程中发展。数学作为一种语言是主观知识，数学经验具有创造性和人性的特点。问题解决和探究的数学过程，比如归纳、猜想、抽象、符号表示、结构和验证，与特定的数学内容相比，前者扮演更为重要的角色。所以要把儿童的数学发展作为其全面发展的一个方面来看待，即数学不过是儿童全面发展的载体之一而已。

进步数学教育观认为“所有学习应集中在儿童的兴趣和需要上”。数学能力带有先天遗传差别，个人的发展速度是不同的；速度不同又使其数学进一步发展的“成熟”时机、水平都不尽相同，只有在适当的经验基础上个人的数学能力才能充分实现，经验缺乏将阻滞儿童进步。直接经验所引起的兴趣，是学习的最好刺激，是教学的基础。由此可见，进步的数学教育观是促使儿童从传统的重视机械学习、死记硬背和教科书权威中解放出来的一种理论。他们特别反对学校教育：有权威的教师；只依靠教科书或书本的教学方法；通过记忆事实材料的知识，进行被动学习；试图使教育孤立于社会现实之外的围墙教育哲学；利用恐吓或体罚作为训练形式。

进步数学教育观是以“儿童为中心”，认为数学学习包括学生对环境的积极反映和自主探究，即数学教育应为数学学习创设适当的建构环境和经验基础，关注儿童的情感、动机和态度，抵御学习的消极因素。该观点认为理想的数学课程是安排一个“游戏场”，教师采用非介入的方

式指导各种数学活动和多学科综合课题的活动。为防止学生产生矛盾、恐惧和消极的情感，教师应是研究人员而不是讲授者，是向导和组织者，主要职责是：管理学习环境及资源，为学生提供丰富、广泛的素材，为他们发现直接经验和创造性做事提供机会；“围绕”学生教学，使其在活动类型、内容和时间方面有相对自主的选择；重视学生，而不是重视学科；重视学生的活动和经验，而不是重视书本，例如，当学生选择学习材料或选择从事探究的问题时，应向他们提出合理的建议，以有利于他们主动地学习；鼓励合作学习，不鼓励竞争性的个人学习。

进步数学教育观提倡学生的积极参加，不主张统一评价数学学习。认为课程应针对活动和经验，而不针对欲获取的知识和欲储存的事实；数学学习和游戏活动是相补的关系，不能对立。强调学习的积极性——学生在游戏、活动、调查、设计、讨论、探究和发现中的学习积极性；学习的自我表现——学生自己的解决方法和求进记录，数学思想和学习规划。提倡创建多彩的学习环境：教学要利用结构模型和教具，促进学生的概念形成及数学思想的显性表现；资源的利用形式、程度、时机等也需由学生自我决定。同时进步的数学教育观主张只对成绩进步作出非形式的评价或教师参照标准作出评价，防止学生失败或防止标定其为“错误”的评价方式，使学生出现烦恼和痛苦的情绪，阻挠其发展。例如，更改学生作业中的错误时，用其他更改方式批注（避免出现直截了当的错号标记，只批对号、不批错号或不写“应这样做！”等等）。

（五）大众数学教育观

大众教育观提出“为大众的数学”，认为人生来平等，故人皆有平等受教育的权利，应把受教育的权利扩大到所有人，实现“为全体人的教育”。同时认为数学为人造就并存在于人的思想中，其本质也是尝试性的、具有可误性和不确定性。人类为了认识现实，揭开事物的表面现象，认清事物的本来面目，需要获得批判意识，发展批判性思维。数学与其他领域的认识、文化和社会生活紧密相关，并能够提供得到认识及思考工具的方法。因此，通过数学教育可以实现如下目标：遵照公正的社会平等原则，对全社会大众实施教育；个人通过教育获得能力，掌握操纵生活的“思维工具”，完全地、批判性地参与民主社会；谋求社会变革的教育——针对财富、权力和机会分配，向更为公正的社会（和世界）发展。即通过培养大众的批判性数学思维，增强大众的民主意识和公民义务责任感；通过数学活动的教学，让学生认识、理解、判断、运用数学，通过在对学生的个人、社会及职业生活有实际意义的背景中运用数学，把自己培养成为自信的问题提出者和解决者。由于具有增强学习者自我实现这一明确的思想观念，希望把学生培养成自主的人和社会的成员，表现出大众数学教育观的“政治化、社会化”倾向，因而大众数学教育观是“以社会为中心”的。

大众数学教育观认为，人们出生时的性格和能力与历经数年环境变化而社会化后的性格和能力相比，前者远比后者显出更多的相同性。所以“能力”是根据学生的经验或根据别人的看法和“标定”方式赋予学生的东西。为使学生获得数学能力，教育应以其兴趣和经验为基础逐步向数学学科方向发展。数学教学应当鼓励学生积极从事数学活动，提出并解决问题；要清晰表达自己的概念和假说，正视他人的观点，接受挑战与矛盾（它们是新概念生长和立足所必需的）。教学要进行名副其实的讨论——学生与学生之间、师生之间的合作学习，通过课题研究和问题解决，培养学生的自信心和参与意识并掌握知识，进而培养批判性思维能力、创新精神、实践能力和社会问题参与能力。

大众数学教育观特别重视“问题提出”的教育，重视在过程中学习数学的作用。为了培养人的公正性，减少竞争，大众数学教育提倡用多种形式评价数学学习，尤其推崇侧重于测定能力的

倾向和成绩进步的程度，而不对学生作出能力定位或既定一个数学等级模式。提倡学校公开作业评价的任务和评价结果，提倡小学生讨论、思索和必要的协商(作为成绩登记)，提倡大一点的学生选择研究课题和课题作业。虽然大众数学教育观也承认证书的社会重要性，认为数学学习必须充分做好考试和统一评价的准备，但认为获得数学证书只是副产品。

二、对几种数学教育观念的分析与思考

通过对上述几种数学教育观的综述可以发现，不同教育观念从不同的角度、不同的侧重点出发，都有其合理的成分，所以不同程度的存在于我们现实的数学教育实践之中。正确地分析每种观念中积极的方面，指出其不适应现代社会对教育发展要求的内容，便于我们明确当前数学教育的观念，有效促进正确改革的发展。

(一)对严格训导数学教育观的分析

严格训导观希望通过数学教育在培养学生基本数学能力的基础上，使其养成遵从法则的习惯，以便培养出具有“条理性、自律性、服从性以及敬业精神”，刻苦、勤奋及自律等好品质的教育对象；“重要的是教师的质量，而不是他们的设备”等。这些观念仍旧是有价值的。例如，他们把学习比做“工作”或辛勤劳动，认为学习数学像生活中获得任何成功之事一样，需依靠专心，依赖个人的数学运用、自我否定和艰苦努力才能取得成功；数学教育提倡必要的竞争；等等。

严格训导观的不足之处在于：不鼓励批判思维和创造性的培养，提倡培养服从和奴化精神；过分强调智力和数学能力的固定性和遗传性，不愿意创造人人机会平等的数学教育；机械学习、死记硬背、技巧练习或死板应用的学习方式；教师权威至上；限制计算器的使用等方面。以上这些在今天看来，已是非常落后的、应该抛弃的观念。

(二)对技术实用主义数学教育观的分析

技术实用主义观将数学教育与社会需求及目标联系起来是其优势所在，同时该观点正确地认识到计算机科学的发展对数学教育所产生的巨大冲击，提出数学教育要承担社会与技术发展所需的实用功能的教育任务也是正确的。

技术实用主义数学教育观的不足之处在于：把技术发展当做社会进步的推动力量，因而倾向于技术目的为中心而非人的文化目标为中心，可以说其观念实际上是“以技术为中心”的。这种只关心数学的直接运用的观念是一种短期报偿的价值观，会使学生误认为数学知识与作为学科的数学的生长和发展无关。另外，技术实用主义数学教育观不关心全体个人的利益，也不关心整体社会的利益，因此数学教育也就无法起到全面地教育完整人的作用。例如，其典型成果——程序学习机对人的发展的一个致命弱点就是不能培养人的创造性。

(三)对旧人文主义数学教育观的分析

正是由于旧人文主义强调推理、逻辑和理性，并将其作为建立、比较和判断知识的手段，才使得数学一直处于古今中外整个课程系统的核心位置。特别是几何对思维发展的促进作用，使得数学作为一门精神学科的工具在人们心目中享有威信，并得到承认与赏识。虽然 19 世纪几何教学受到批评，但是未波及纯数学，而且直到 20 世纪应用数学的内容才开始进入学校课程的事实说明旧人文主义数学教育观的影响极大。事实证明，数学是发展学生能力、开发学生智力的最好学科。特别是在当今科技发展的时代，教育中将数学视为发展学生智力的主要学科已没有任何争议。

旧人文主义数学教育观的不足之处在于：过分强调纯数学，单纯追求数学的抽象性与逻辑性，使数学学科的表达越来越追求形式化、符号化，造成了基础教育的学生经常感到所学习的数学内容过于抽象、晦涩、难懂；同时，由于极力排斥应用数学，使得学生在学习基本理论时，不知道“这个东西有什么用”；把学生看作是一个接受知识的容器，成为被动的学习者等。以上方面已成为当今改革者激烈抨击的地方。

（四）对进步的数学教育观的分析

突出儿童的本质，重视学生的兴趣和需要，关注学生的主动精神，认为增强学生的自尊心，使它成为自信的数学认知动因的这些观点非常值得借鉴。重视数学的创造性而非注重功利是数学教育的生命所在；注意将学生的学习与其生活环境密切联系，将学生生活、经验方面的内容吸收到学校课程中来；注重让学生从活动、经验中学，有利于培养学生解决问题的能力；发现问题、解决问题，以及学生对待数学的态度在各国数学教育中得到普遍加强；学生创造性的数学活动受到重视，诸如“数学探究”、数学开放问题等一系列研究迅速开展起来。以上方面充分表明了进步数学教育观已在世界范围内取得普遍认可。

进步数学教育观的不足之处在于：将儿童视为“纯真、蒙昧的人”或“生长的花朵”，这些比喻并不恰当；偏重课程的心理结构，将教学内容局限于学生的日常生活经验，以学生的“生活”取代学生的社会实践；轻视前人创造的文化、科学，忽视知识的体系和科学的逻辑结构。其结果是：淡化了教师的作用，片面强调学生主体的自发性，将学生眼前的日常活动作为衡量教学质量的标准，难以使学生获得反映自然和社会规律的基本知识，导致学生所获知识质量的严重下降，实质上限制了学生主体性的发展。另外，过分保护儿童的观点也有问题。恐怕挫伤儿童情感，不明确指出或修改其“错误”。用婉转词（“瞧我的做法”）代替直接指出错误的评价词（即不用错号或非对号批改作业）的做法，会掩盖问题的真正意义。殊不知，认识错误对于学习是必要的，认知矛盾或冲突是刺激儿童智力发展所必需的，对数学学习是必不可少的，而且正确处理矛盾也是现代社会公民的基本生活技能。进步数学教育观试图用否定矛盾与冲突来维护人为的和谐，事实上反而会阻碍学生的认知、情感和社会能力的健康发展。

（五）对大众教育数学观的分析

把受教育的权利扩大到所有人，表达了大众数学教育观的社会和政治意义，因而它体现了社会公正、民主的原则，是社会进步的标志。以社会建构主义为理论基础，强调数学的价值受文化的局限是可纠正、拟经验的，不再区分实际的知识与纯理论的知识，不再认为知识绝对正确，不再认为“高层”文化比大众或“人们的”文化更有价值。要造就一个较多人性化、受人欢迎的数学教育体系，反映数学的社会建制本质，减轻人们对数学的生疏和神秘感，摧毁“学生的数学概念要么正确要么错误”的这种认识。使学生对所学知识（无论源于什么权威）能自信地提出异议，不求盲从，只承认合乎理性判定的知识，以便培养学生的独立批判思维能力；学生是知识和意义的积极造就和探索者，提倡合作学习；等等。这些都是具有先进性意义的观念。

大众教育数学观的不足之处在于：关于如何有效地改变教育内容和教学方式，全面实现其教育目的缺乏深入的研究。观念本身的内在矛盾在于，它的执行问题引起了数学教育实践者的困惑。例如，大众教育目的突出政治和社会价值，必然涉及对社会及政治等争执性问题的看法。但数学教师有没有必要把触及社会争端问题作为自己教学的分内之事，对此存在很大分歧。鼓励学生对社会问题、学科、教学法和评价提出异议，会引起矛盾和冲突。矛盾、争论和据理争辩

不仅在许多教育实践中失败，而且与学生的文化背景有距离。许多学生惶惶然不知所措，干扰或搅乱了学生的数学学习。另外，允许社会和政治内容进入数学课程，易使数学教育受到商业和政治团体的影响或被它们公开操纵。虽然从观念本身来说，其目的在于以公正唤起民主，然而持其他观念者并不这样评价它的目的，而是倡导其他价值。例如，由于政治和商业求利者为了自己的利益而开发课程、出版课本教材，必然会对学校教育造成直接的压力。

三、现状思考

从上面的分析可知，出于不同的社会发展需求，各种数学教育观在不同的历史时期也随之不同。对于处在一个飞速发展、信息多变时代的今天，整合各种数学教育观念中的合理成分，为实现人的生存与发展作准备才是教育的根本任务。

首先，教育学从哲学中分离出来得到迅猛发展的一个重要方面，就是教师在教育中所起到的巨大的推动作用。无论教师是作为教育教学的"主导者"，还是"引导者、组织者和管理者"，教师在学生接受教育的过程中都扮演着一个与学生不同的角色，他们使得学生的学习与发展变得更经济、更有效率。任何淡化"教师作用"的教育观念都是不完善的教育观。

其次，科学发展的最终目的是为人认识世界、改造世界而服务的，所以数学教育不应忽视本学科的"实用"功能。特别是科技高速发展的今天，技术成果、科技产品已成为人们生活的重要组成部分，不考虑到"技术实用"的教育观也不能很好地完成培养人的生存能力、促进其全面发展的教育任务。

第三，数学教育观念当然不能无视"数学科学的本质"，数学科学的抽象性、严谨性，甚至数学科学的形式化特征是数学区别于其他学科，成为塑造人的品质的优势所在。古今中外，数学一直是开发人的智力，启迪人的思维的重要学科的事实是不容忽视的。我们不能被一些时髦、新异的观点冲昏了头脑而作出舍本求末的行为。

第四，任何教育观无论以什么为中心，都不要忘记教育的对象——学生。教师中心也好、技术中心也好、数学中心也好，甚至是社会中心，都应以最终是否促进了学生的真正发展为其检验是否成功的关键所在。所以学生的发展是教育的根本任务，当学生真正地满足社会发展的需求这个大目标，实现了自我的全面发展之后，才能说这样的教育是成功的教育。

第五，必须研究数学教育所处的现实社会环境，不能使数学教育脱离社会，相反要在学生自己的有限天地中根据社会整体利益实现自我发展，促进整个社会的进步与发展。

严格训导、技术实用主义、旧人文主义、进步教育、大众教育几种数学教育观念都是只突出强调了某一方面的重要作用，分别"以教师为中心""以技术实用为中心""以纯数学为中心""以儿童为中心""以社会为中心"。事实上正确的数学教育观念应该是教师、技术实用、数学、学生、社会这五个方面的有机统一体。学生需在教师的帮助下，通过学习数学，掌握数学的本质及数学技术，实现自我完善、自我发展，从而促进社会的进步与发展。

第二章　小学数学教育思想

第一节　关于教育思想

数学思想是从某些具体数学认识过程中提炼和概括，在后继的认识活动中被反复证实其正确性，带有一般意义和相对稳定的特征。它揭示了数学发展中普遍的规律，对数学的发展起着指引方向的作用，它直接支配着数学的实践活动，是数学的灵魂。而数学方法则体现了数学思想，在自然辩证法一书的导言中，恩格斯叙述了笛卡儿制订了解析几何，耐普尔制订了对数，来布尼茨和牛顿制订了微积分后指出："最重要的数学方法基本上被确定了"，对数学而言，可以说最重要的数学思想也基本上被确定了。

一、数学思想的基本内涵

谈到数学思想，人们很容易想到数学思想方法，而且容易将数学思想和数学思想方法发生混淆。通常认为，在中小学数学中，数学思想方法具体表现为三个不同的层次：解决具体问题的思想方法，如消元法、代入法、配方法和待定系数法等；逻辑方面的思想方法，如分析法、综合法、演绎法、归纳法和类比法等；一般性的数学思想方法，如公理化思想方法、数学模型化思想方法等。这些都是数学思想方法，而不是基本数学思想。

1.什么是数学的基本思想

数学的基本思想，是数学产生和发展所必须依靠的、必须依赖的思想，同时也是学习过数学的人应当具备的思维特征，这些特征表现在人们分析和解决日常生活问题的过程当中。

2.数学思想与数学方法的关系

数学思想和数学方法既有区别又有密切联系。数学思想的理论和抽象程度要高一些，而数学方法的实践性更强一些。人们实现数学思想往往要靠一定的数学方法，而人们选择数学方法，又要以一定的数学思想为依据。因此，二者是有密切联系的。我们把二者合称为数学思想方法。数学思想方法是数学的灵魂，那么，要想学好数学、用好数学，就要深入到数学的"灵魂深处"。

首先，数学思想是数学观念的系统化，具有概括性和普遍性，它帮助人们在数学活动中确立正确的观念、方向和依据，使数学活动沿着有效的思维轨道运行，指导方法的运用；数学方法指向数学实践活动，是数学思想的表现形式和得以实现的手段，具有操作性和具体性，为数学问题的求解和数学知识的获取提供了可能。

其次，数学思想在数学活动中起决策作用；数学方法在数学活动中起"渡船"作用。数学思想是内隐的；而数学方法是外显的。数学思想比数学方法更深刻、更抽象地反映数学对象间的

内在关系,是数学方法的进一步的概括和升华。

二、数学思想的价值

首先,数学思想是数学发生、发展的根本,是数学内容价值的核心,体现了数学的精髓,是一种观念形态的策略创造。数学思想指引人们如何用数学的眼光、数学的方法去透视事物、提出概念、解决问题。

其次,数学思想能培养人们的抽象思维能力、逻辑推理能力和数学应用能力,进而激发灵感、诱发创造。个人的数学修养不仅仅表现在他所知道的数学结论和他能解多少题,更表现在他对数学精神思想的领会和潜意识的使用。正如日本著名数学教育家米山国藏所说,“我搞了多年的数学教育,发现学生们在初中、高中阶段学习的数学知识……离校后不到一二年,便会很快忘光了。然而,无论他们从事什么工作,唯有深深铭刻于头脑中的数学精神、数学思维方法、研究方法……却随时的发生作用,使他们受益终生。”

第三,小学数学基本思想的主要特征包含了以下几个方面。数学抽象的思想 :分类的思想,集合的思想,数形结合的思想,“变中有不变”的思想,符号表示的思想,对称的思想,对应的思想,有限与无限的思想,数学推理的思想:归纳的思想,演绎的思想,公理化思想,转换化归的思想,联想类比的思想,逐步逼近的思想,代换的思想,特殊与一般的思想。数学建模的思想:简化的思想,量化的思想,函数的思想,方程的思想,优化的思想,随机的思想,抽样统计的思想。

第二节　常见小学数学教育思想

《九年制义务教育全日制小学数学课程标准》(试验稿)提出:“学生通过学习,能够获得适应未来社会生活和进一步发展所必需的重要数学知识以及基本的数学思想方法。”因此,在小学数学教学阶段有意识地向学生渗透一些基本数学思想方法可以加深学生对数学概念、公式、定理、定律的理解,是提高学生数学能力和思维品质的重要手段,是数学教育中实现从传授知识到培养学生分析问题、解决问题能力的重要途径,也是小学数学教学进行素质教育的真正内涵之所在。在小学阶段,数学思想主要有符号思想、类比思想、分类思想、方程与函数思想、建模思想等。

一、符号思想

(一)符号思想的概念

数学符号的发明和使用比数字晚,但是数量多得多。西方较早地在数学研究中引进了符号,十六世纪数学家韦达对数学符号做了很多改进,并且第一个有意识地系统地用字母表示已知数、未知数及其乘幂,带来了代数学研究的重大拓展,奠定了符号代数的基础,后来大数学家笛卡儿对韦达使用的字母又作了改进。用符号化的语言(包括字母、数字、图形和各种特定的符号)来描述数学的内容,这就是符号化思想。符号化思想是一般化的思想方法,具有普遍的意义。可以说,数学符号是数学的语言,数学世界是符号化的世界,数学有了符号,才具有简明、抽象、清晰、准确等特点,国际通用数学符号的使用,数学才成为国际化的语言。数学符号作为人们表示、计算、推理和解决问题的工具,具有非常重要的意义。

(二)如何理解符号思想

数学课程标准比较重视培养学生的符号意识,在小学阶段对于这一重要思想的理解是:

1.能从具体情境中抽象出数量关系和变化规律,并用符号加以表示。这是一个从具体到抽象、从特殊到一般的探索归纳的过程。在数学中各种量的关系,量的变化以及量与量之间进行推导和演算,都会用到字母表示数,以符号的浓缩形式来表达大量的信息。如通过观察三组以上,两数相加及交换加数位置后和的变化情况,发现交换加数的位置后和不变,归纳出加法交换律,并用符号表示:$a+b=b+a$。再如在长方形上拼摆单位面积的小正方形,探索并归纳出长方形的面积公式,并用符号表示:$S=ab$。这是一个符号化的过程,同时也是一个模型化的过程。

2.理解符号所代表的数量关系和变化规律。这是一个从一般到特殊、从理论到实践的过程。包括用关系式、表格和图像等表示形式来表示情境中数量间的关系。如假设一个正方形的边长是 a,那么 $4a$ 就表示该正方形的周长,a^2 表示该正方形的面积。这同样是一个符号化的过程,同时也是一个解释和应用模型的过程。

3.会进行符号间的转换。数量间的关系一旦确定,便可以用数学符号表示出来,但数学符号不是唯一的,可以丰富多彩。如一辆汽车的行驶时速为定值 60 千米,那么该辆汽车行驶的路程和时间成正比,它们之间的数量关系既可以用表格的形式表示,也可以用公式 $s=60t$ 表示,还可以用图像加以表示。也就是说这些数学符号是可以相互转换的。

4.能选择适当的程序和方法解决用符号所表示的问题。这是指完成符号化后的下一步工作,就是进行数学的运算和推理。能够进行正确的运算和推理是非常重要的数学基本功,也是非常重要的数学能力。

(三)符号化思想的具体应用

数学的发展虽然经历了几千年,但是数学符号的规范和统一却经历了比较慢长的过程。如我们现在通用的算术中的十进制计数符号数字 0～9 于公元 8 世纪在印度产生,经过了几百年才在全世界通用,从统一使用截止到现在也不过几百年。代数在早期主要是以文字为主的演算,直到 16—17 世纪韦达、笛卡儿和莱布尼兹等数学家逐步引进和完善了代数的符号体系。

符号在小学数学中的应用

知识领域	知识点	应用举例	应用拓展
数与代数	数的表示	阿拉伯数字:0～9。	
		中文数字:一～十。	
		百分号:%。	千分号:‰
		用数轴表示数。	
	数的运算	+、-、×、÷、()、〔〕、{}、(平方)、(立方)。	
	数的大小关系	=、≈、>、<。	≥、≤、≠
	运算定律	加法交换律:$a+b=b+a$。	
		加法结合律:$a+b+c=a+(b+c)$。	
		乘法交换律:$ab=ba$。	

		乘法结合律：(ab)c＝a(bc)。	
		乘法分配律：a(b＋c)＝ab＋ac。	
	方程	ax＋b＝c。	
	数量关系	时间、速度和路程：s＝vt。	
		数量、单价和总价：a＝np。	
		正比例关系：y/x＝k。	
		反比例关系：xy＝k。	
		用表格表示数量间的关系。	
		用图像表示数量间的关系。	
空间与图形	用字母表示计量单位	长度单位：km、m、dm、cm、mm。	
		面积单位：km、m、dm、cm、mm。	
		质量单位：t、kg、g。	
	用符号表示图形	用字母表示点：三角形 ABC。 用符号表示角： ∠1、∠2、∠3、∠4。	△ABC 线段 AB 直线 CD 直线 L
		两线段平行：AB∥CD。 两线段垂直：AB⊥CD。	ABCD
	用字母表示公式	三角形面积：S＝ab。	
		平行四边形面积：S＝ah。	
		梯形面积：S＝(a＋b)h。	
		圆周长：C＝2πr， 圆面积：S＝πr^2。 长方体体积：v＝abc， 正方体体积：v＝a^3， 圆柱体积：v＝sh， 圆锥体积：v＝ sh。	
统计与概率	统计图和统计表	用统计图表描述和分析各种信息。	
	可能性	用分数表示可能性的大小。	

（四）符号化思想的教学

数学符号具有抽象性，是人们在研究现实世界的数量关系和空间形式的过程中产生的，它来源于生活，但并不是生活中真实的物质存在，具有抽象概括性。如数字 1，它可以表示现实生活中任何数量是一个的物体的个数，是一种高度的抽象概括。数学符号具有精确性，每个数学符号从它产生并被广泛应用的那时起，就具有明确的含义，能够进行精确的数学运算和

推理证明。数学符号具有简捷性,能帮助人们完成大量的运算和推理证明,简捷的符号在参与运算和推理证明的过程中,简捷性就体现出来了。如欧洲人12世纪以前基本上用罗马数字进行计数和运算,由于这种计数法不是十进制的,大数的四则运算非常复杂,严重阻碍了数学的发展和普及。随着12世纪印度数字及十进制计数法传入欧洲,欧洲的计算才得以较快发展和普及。数学符号的发展也经历了从各自独立到逐步规范、统一和国际化的过程,最明显的就是早期的数字符号从各自独立的埃及数字、巴比伦数字、中国数字、印度数字和罗马数字到统一的阿拉伯数字。数学符号经历了从发明到应用再到统一的逐步完善的过程,促进了数学的发展;反之,数学的发展也促进了符号的发展。因此,数学和符号是相互促进并发展的,而且这种发展可能是一个漫长的过程。

符号思想作为数学最基本的思想之一,数学课程标准把培养学生的符号意识作为必学的内容,并提出了具体要求,足以证明它的重要性。教师在日常教学中要给予足够的重视,并落实到课堂教学目标中。要创设合适的情境,引导学生在探索中归纳和理解数学模型,并进行解释和应用。学生只有理解和掌握了数学符号的内涵和思想,才有可能利用它们进行正确的运算、推理和解决问题。我们也要认识到把客观存在的事物和现象及它们相互之间的关系抽象概括为数学符号和公式,有一个从具体到表象再抽象符号化的过程。符号意识的培养应贯穿于数学学习的整个过程,需要一定的训练才能达到比较熟练的程度。小学生在数学学习过程中,从接受到运用符号思想会遇到较多的困难,建议我们在平时的教学中,从介绍符号使用的历史入手,循循善诱,加强培养和训练。

二、化归思想

(一)化归思想的概念

当人们面对数学问题时,如果直接应用已有知识不能或不易于解决该问题,那么就需要将要解决的问题不断转化形式,把它归结为能够解决或比较容易解决的问题,最终使原问题得到解决,把这种思想方法称为化归(转化)思想。小学阶段数学知识的呈现,虽然表现出由易到难、从简到繁的过程,但是,人们在学习数学、理解和掌握数学的过程中,却经常把陌生的知识转化为熟悉的知识、把繁难的知识转化为简单的知识,在不断转化的基础上逐步解决较复杂的数学问题。因此,化归既是一般化的数学思想方法,同时又具有普遍使用的意义和作用,是攻克各种复杂问题的法宝之一。

(二)化归所遵循的原则

化归思想的本质就是在已有简单的、具体的、基本知识的基础上,把未知化为已知、复杂归为简单、一般化为特殊、抽象化为具体、非常规化为常规,从而解决数学问题。因此,应用化归思想时要注意遵循以下几个基本原则:

1.数学化原则。即把生活中的问题转化为数学问题,建立数学模型,从而应用数学知识找到解决问题的方法。数学来源于生活,应用于生活,一定意义上抽象于生活。学习数学的目的之一就是要利用数学知识解决生活中的各种问题,数学课程标准特别强调的目标之一就是培养实践能力。因此,数学化原则是化归的普遍原则之一。

2.熟悉化原则。即把陌生的问题转化为熟悉的问题。人们数学学习的过程,就是不断面对新知识的过程,解决疑难问题的过程,就是不断面对陌生问题的过程。从某种程度上说,这种转

化过程对学生来说既是一个探索的过程，又是一个创新的过程。与课程标准提倡培养学生的探索能力和创新精神是一致的。因此，学会把陌生的问题转化为熟悉的问题，是化归思想的重要原则。

3.简单化原则。即把复杂的问题转化为简单的问题。对解决问题者而言，复杂的问题未必都不会解决，但解决的过程可能比较复杂。因此，把一个复杂的问题转化为多个简单的问题，寻求一些技巧和捷径，是化归思想的基本原则。

3.直观化原则。即把抽象的问题转化为具体的问题。抽象性是数学的重要特点，有些抽象的问题，直接分析解决难度较大，可以转化为具体的问题，或者借助直观手段，会变得比较容易分析解决。因而，直观化是化归思想在小学阶段应用的常见原则。

（三）化归思想的具体应用

学生面对的数学问题，可以简单地分为两类：一类是直接应用已有知识便可顺利解答的问题；另一类是陌生的、不能直接解答，需要综合地应用已有知识或创造性地分析理解才能解决的问题。如：知道一个长方形的长和宽，求它的面积，这是第一类问题；通过“割补平移”把平行四边形转化为长方形，观察分析二者之间的联系，并最终推导出它的面积公式，再计算面积，就属于第二类问题。在小学阶段，学生在学习数学的过程中所遇到的很多问题都可以归为第二类问题，需要不断地把第二类问题转化为第一类问题，再加以解决。解决问题的过程。从某种意义上来说就是不断地转化求解的过程。因此，化归思想在小学阶段应用非常广泛。

化归思想在小学数学中的应用如下表

知识领域	知识点	应用举例
数与代数	数的意义	整数的意义：用实物操作和直观图帮助理解。
		小数的意义：用直观图帮助理解。
		分数的意义：用直观图帮助理解。
		负数的意义：用数轴、温度计等直观图帮助理解。
	四则运算的意义	乘法的意义：若干个相同加数相加的一种简便算法。
		除法的意义：乘法的逆运算。
	四则运算的法则	整数加减法：用实物操作和直观图帮助理解算法。
		小数加减法：相同数位对齐，然后按照整数的方法进行计算。
		小数乘法：先按照整数乘法的方法进行计算，再点小数点。
		小数除法：把除数转化为整数，基本按照整数除法的方法进行计算，需要注意被除数小数点与商的小数点对齐。
		分数加减法：异分母分数加减法转化为同分母分数加减法。
		分数除法：转化为分数乘法。
	四则运算各部分间的关系	$a+b=c$，$c-a=b$， $ab=c$，$a=c\div b$。
	简便计算	利用运算定律进行简便计算。
	方程	解方程：解方程的过程，实际就是不断把方程转化为未知数前边的系数是1的过程（$x=a$）。
	解决问题的策略	化繁为简：植树问题、鸡兔同笼问题等。

		化抽象为直观：用线段图、图表、图像等直观表示数量之间的关系，帮助推理。
		化实际问题为数学问题。
		化一般问题为特殊问题。
		化未知问题为已知问题。
空间与图形	三角形内角和	通过操作把三个内角转化为平角。
	多边形的内角和	转化为三角形求内角和。
	面积公式	正方形的面积：转化为长方形求面积。
		平行四边形面积：转化为长方形求面积。
		三角形的面积：转化为平行四边形求面积。
		梯形的面积：转化为平行四边形求面积。
		圆的面积：转化为长方形求面积。
		组合图形的面积：转化为求基本图形的面积。
	体积公式	正方体的体积：转化为长方体求体积。
		圆柱的体积：转化为长方体求体积。
		圆锥体积：转化为圆柱求体积。
统计与概率	统计图和统计表	运用不同的统计图表描述各种数据。
	可能性	运用不同的方式表示可能性的大小。

（四）解决问题中的化归策略

1. 化抽象问题为直观问题

抽象性是数学的重要特征之一，这是每个想学好数学的人必须要面对的问题。从小学到初中，再到高中，数学问题的抽象性不断加强，学生的抽象思维能力在不断接受挑战。如果能把比较抽象的问题转化为可操作或较直观的问题，经过不断的抽象→直观→抽象的训练，学生的抽象思维能力也会逐步提高。下面举例说明。

案例：$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=$

分析：此问题通过观察，可以发现一个规律：后项是它前项的$\frac{1}{2}$。但是对于小学生来说，还没有学习等比数列求和公式。如果把一条线段看作 1，先取它的一半表示$\frac{1}{2}$，再取余下的一半的一半表示$\frac{1}{4}$，这样不断地取下去，最终相当于取了整条线段。因此，上式的结果等于 1。本案例的解题策略是利用线段图将复杂的问题直观化，使小学生解决了高中生才能解决的问题。

2. 化繁为简的策略

有些数学问题比较复杂，直接解答过程繁琐。如果在结构和数量关系相似的情况下，从相对简单的问题入手，找到解决方法或建立模型，经过适当检验证明此种方法或模型是正确的，那么该问题一般来说就得到了解决。

案例 1：把 186 拆分成两个自然数的和，怎样拆分才能使拆分后的两个自然数的乘积最大？187 呢？

分析：此题中的数比较大，如果用枚举法一个一个地猜测验证，比较繁琐。如果从比较小的

数开始枚举，利用不完全归纳法，尝试找到解决方法。如从 10 开始，10 可以分成：1 和 9，2 和 8，3 和 7，4 和 6，5 和 5。它们的积分别是：9，16，21，24，25。可以初步认为拆分成相等的两个数的乘积最大。如果不确定，可再举例验证，如 12 可以分成：1 和 11，2 和 10，3 和 9，4 和 8，5 和 7，6 和 6，它们的积分别是：11，20，27，32，35，36。由此可以推断：把 186 拆分成 93 和 93，93 和 93 的乘积最大，乘积为 8649。适当地加以检验，如 92 和 94 的乘积为 8648，90 和 96 的乘积为 8640，都比 8649 小。

第二问中，因为 187 是奇数，无法拆分成相等的两个数，只能拆分成相差 1 的两个数，这时它们的乘积最大。具体过程类似一问。

案例 2：你能快速口算 85×85＝，95×95＝，105×105＝吗？

分析：仔细观察可以发现，此类题的共同特点是：等数相乘，且个位数是 5。如果不知道个位数是 5 的相等的两个数的乘积的规律，直接快速口算是有难度的。那么，解答此类题有什么技巧呢？不妨从简单的数开始探索，如 15×15＝225，25×25＝625，35×35＝1225。通过这几个算式的因数与相应的积的特点，可以初步发现规律是：个位数是 5 的相等的两个数的乘积分为左右两部分——左边为因数中 5 以外的数字乘比它大 1 的数，右边为 25(5 乘 5 的积)。所以 85×85＝7225，95×95＝9025，105×105＝11025，经过验证符合规律。

面对一些解答过程繁琐的数学问题，学生往往就会产生退缩情绪，或者在繁琐的解答过程中出现失误。因此，学会化繁为简的解题策略，对于提高小学生解决繁难问题的能力大有帮助。

3. 化实际问题为特殊的数学问题

与小学数学有关的生活问题，多数可以用常规的小学数学知识加以解决。部分生活问题由于条件不全面而无法建立模型。这时，就需要超越常规思维模式，从另外的角度进行分析，找到解决问题的方法。

案例 1：某旅行团队翻越一座山。上午 9 时上山，每小时行 3 千米，到达山顶时休息 1 小时。下山时，每小时行 4 千米，下午 4 时到达山底。全程共行了 20 千米。上山和下山的路程各是多少千米？

分析：由于只知道总路程，上下山的速度，而不知道上山和下山所用的时间，因此无法直接求出各自的路程。仔细观察可以发现：题目中出现了两个未知数量的总和以及与这两个数量有关的特定量，这样看来就类似于“鸡兔同笼”问题，可用假设法解决。假设都是上山，那么总路程是 6×3＝18(千米)，比实际路程少算了 2 千米，所以下山时间是 2÷(4－3)＝2(小时)，上山时间是 4 小时。上山和下山的路程分别是 12 千米和 8 千米。

案例 2：李阿姨买了 2 千克苹果和 3 千克香蕉用了 11 元，王阿姨买了同样价格的 1 千克苹果和 2 千克香蕉，用了 6.5 元。每千克苹果和香蕉各多少钱？

分析：此题初看是关于单价、总价和数量的问题，但是，由于题中没有告诉苹果和香蕉各自的总价是多少，因此无法直接计算。观察信息后可以发现：题目中分两次给出了不同数量的苹果和香蕉的总价，问题中苹果和香蕉各自的单价之间没有直接的关系，超出了一元一次方程的范围，不适合用方程解决。在小学阶段，利用二元一次方程组加减消元的思想，可以解决此类问题。具体来说就是把两组数量中的一个数量转化成相等的关系，通过相减抵消，得到一个一元一次方程。不必列式推导，直接分析便可：1 千克苹果和 2 千克香蕉 6.5 元，那么可得出 2 千克苹果和 4 千克香蕉 13 元；题中已知 2 千克苹果和 3 千克香蕉 11 元。用 13 减去 11 得 2，所以香蕉的单价是每千克 2 元。再通过计算得苹果的单价是每千克 2.5 元。

4. 化未知问题为已知问题

对于学生而言，学习的过程是一个不断面对新知识的过程，有些新知识可以通过某些载体直接呈现，如面积和面积单位的概念，可通过物体或图形直接引入。也有一些新知识需要利用已有知识经过探索把新知识转化为旧知识进行学习。如平行四边形面积公式的学习，具体做法之一是：通过割补平移，把平行四边形转化为长方形之后求面积。这种化未知为已知的策略，在数学学习中很常见。

案例：水果商店昨天销售的苹果比香蕉的 2 倍多 30 千克，这两种水果一共销售了 180 千克。销售香蕉多少千克？

分析：学生在学习列方程解决问题时学习了最基本的有关两个数量的一种模型：已知两个数量的倍数关系以及这两个数量的和或差，求这两个数量分别是多少。本题中的苹果和香蕉的关系，不是简单的倍数关系，而是在倍数的基础上增加了一个条件，即苹果比香蕉的 2 倍还多 30 千克。假如把 180 减去 30 得 150，那么题目可以转化为：如果水果商店昨天销售的苹果是香蕉的 2 倍，那么这两种水果一共销售了 150 千克。销售香蕉多少千克？这时就可以列方程解决了，设未知数时要注意设谁为 x，题目求的是哪个量。

这个案例给我们的启示是：学生既要学习数学知识，又要学习思想方法。学生不仅要学会类型套类型的解题模式，更要学会理解和掌握基本的数学模型的基础上，形成迁移类推或举一反三的能力。教师在上面最基本的模型基础上，可以引导学生深入思考以下几个问题：

(1)水果商店昨天销售的苹果比香蕉的 2 倍少 30 千克，这两种水果一共销售了 180 千克。销售苹果多少千克？

(2)水果商店昨天销售的香蕉比苹果的$\frac{1}{2}$多 30 千克，这两种水果一共销售了 180 千克。销售苹果多少千克？

(3) 水果商店昨天销售的香蕉比苹果的$\frac{1}{2}$少 30 千克，这两种水果一共销售了 120 千克。销售苹果多少千克？

(4) 水果商店昨天销售的苹果是香蕉的 2 倍，销售的梨是香蕉的 3 倍。这三种水果一共销售了 180 千克。销售香蕉多少千克？

(5)水果商店昨天销售的苹果是香蕉的 2 倍，销售的梨是苹果的 2 倍。这三种水果一共销售了 210 千克。销售香蕉多少千克？

以上几个题目，可能已经超越了教材基本的难度标准。但近年来数学界有这样的一种理念："高标准教学，标准化考试"，因而我们可以在课堂上大胆探索。

5. 化一般问题为特殊问题

数学中的规律一般具有普遍性，但是对于小学生而言，普遍的规律往往比较抽象，难以理解和应用。结合特殊的例子运用不完全归纳法加以猜测验证，对小学生是比较可行的解决问题的策略。

案例：任意一个大于 4 的自然数，拆成两个自然数之和，怎样拆分才能使这两个自然数的乘积最大？

分析：此问题如果运用一般的方法进行推理，可以设这个大于 4 的自然数为 N。

如果 N 为偶数，可设 N＝2K(K 为任意大于 2 的自然数)；那么 N＝K＋K＝(K－1)＋(K＋

1)=(K−2)+(K+2)=…,因为 $K^2>K^2-1>K^2-4>\cdots$,所以 $K\times K>(K-1)\times(K+1)>(K-2)\times(K+2)>\cdots$,所以把这个偶数拆分成两个相等的数的和,它们的积最大。

如果 N 为奇数,可设 N=2K+1(K 为任意大于 1 的自然数);那么 N=K+(K+1)=(K−1)+(K+2)=(K−2)+(K+3)=…,因为 $K^2+K>K^2+K-2>K^2+K-6>\cdots$,所以 $K\times(K+1)>(K-1)\times(K+2)>(K-2)\times(K+3)>\cdots$,所以把这个奇数拆分成两个相差 1 的数的和,它们的积最大。

仔细观察问题可以发现,题中的自然数只要大于4,便存在一种普遍的规律。因此,取几个具体的特殊的数,也应该存在这样的规律。这时就可以把一般问题转化为特殊问题,仅举几个有代表性的比较小的数(只要大于4)进行枚举归纳,如10,11等,就可以解决问题,具体案例见前文。

化归思想作为最重要的数学思想之一,在学习数学和解决数学问题的过程中无所不在,因此我们要培养学生运用化归的思想方法解决各种复杂的问题的习惯,最终达到在数学的世界里举重若轻的境界。

三、模型思想

(一)模型思想的概念

数学模型是用数学语言概括地或近似地描述现实世界事物的特征、数量关系和空间形式的一种数学结构。广义的数学模型包括:数学的概念、定理、规律、法则、公式、性质、数量关系式、图表、程序等。主要表现形式是数学符号表达式和图表,因而它与符号化思想有很多相通之处,是一般化的思想方法,具有普遍意义。不过,也有数学家对数学模型的理解更侧重于数学的应用性,即把数学模型描述为特定事物系统的数学关系结构。如通过数学在经济、物理、农业、生物、社会学等领域的应用,所构造的各种数学模型。为了把数学模型与数学知识或是符号思想明显地区分开来,我们主要从狭义的角度讨论数学模型,即重点分析数学模型在小学阶段的构建及应用的相关问题。

(二)模型思想的重要意义

数学模型是运用数学的语言和工具,在对现实信息进行适当简化的基础上,经过推理和运算,对相应数据进行分析、预测、决策和控制,经过实践检验其结果是正确的,便可作为指导我们实践的依据。如上所述,数学模型在当今市场经济和信息化社会已经有比较广泛的应用。因而,模型思想是重要的数学思想方法之一。

现行的数学课程标准对符号化思想有明确的要求,如要求学生“能从具体情境中抽象出数量关系和变化规律,并用符号来表示”,这实际上就包含了模型思想。但是,课程标准对第一、二学段并没有明确提出模型思想的要求,只是在第三学段的内容标准和教学建议中明确提出了模型思想,要求在教学中“注重使学生经历从实际问题中建立数学模型”,建议教学过程以“问题情境—建立模型—解释、应用与拓展”的模式展开。现阶段小学数学教育工作者中已经有人关注了模型思想,但多数人局限于套用第三学段对模型思想的要求进行研究,很难做到要求的具体化和课堂教学的贯彻落实。我们应该注意到,符号化思想和模型思想的区别在于:符号化思想注重于数学的抽象和符号表达,模型思想则注重于数学的应用,即通过数学结构化解决问题,擅长解决现实中的各种问题。相同之处是把现实情境数学结构化的过程也是一个抽象的过程。新的课程标准修改稿与之前的课程标准相比有了较大变化,在课程内容部分中明确提出了“初

步形成模型思想”，并具体解释为“模型思想的建立是帮助学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径。建立和求解模型的过程包括：从现实生活或具体情境中抽象出数学问题，用数学符号建立方程、不等式、函数等表示数学问题中的数量关系和变化规律，求出结果、并讨论结果的意义。这些内容的学习有助于学生初步形成模型思想，提高学习数学的兴趣和应用意识”。并在教材编写建议中提出了“教材应当根据课程内容，设计运用数学知识解决问题的活动。这样的活动应体现‘问题情境—建立模型—求解验证’的过程，这个过程要有利于理解和掌握相关的知识技能，感悟数学思想、积累活动经验；要有利于提高发现和提出问题的能力、分析和解决问题的能力，增强应用意识和创新意识”。从这方面可理解为：在小学阶段，从课程标准的角度正式提出了模型思想的基本理念和作用，并明确了模型思想的重要意义。这不仅表明了其在数学领域的应用价值，同时明确了建立模型是数学应用和解决问题的核心。

（三）模型思想的具体应用

数学的发现和发展过程，同时也是数学的应用过程。从这个角度而言，伴随着数学知识的产生和发展，数学模型的产生和发展实际上也随之开始了。如自然数系统 1，2，3，……就是描述离散数量的数学模型。2000 多年前的古人用公式经过测量计算出土地面积，用方程解决实际问题等，实际上都是利用各种数学知识建立相应数学模型进而解决相关问题的具体应用。就小学阶段的建模思想的应用来说，大多数是属于古老的初等数学的简单应用，就数学家的定义而言，算不上是真正的数学模型。虽然小学阶段的数学建模应用十分简单，但仍然是现实生活和进一步学习所不可或缺的组成部分。

小学数学中的模型如下表

知识领域	知识点	应用举例
数与代数	数的表示	自然数列：0，1，2，……
		用数轴表示数。
	数的运算	$a+b=c$， $c-a=b$，$c-b=a$， $a\times b=c(a\neq 0, b\neq 0)$， $c\div a=b(a\neq 0)$，$c\div b=a(b\neq 0)$。
	运算定律	加法交换律：$a+b=b+a$。
		加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$。
		乘法交换律：$ab=ba$。
		乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$。
		乘法分配律：$a(b+c)=ab+ac$。
	方程	$Ax=c$，$ax+b=c$，$ax-b=c$，$ax+bx=c$，$ax-bx=c$。
	数量关系	时间、速度和路程：$s=vt$。
		数量、单价和总价：$a=np$。
		正比例关系：$y/x=k$。
		反比例关系：$xy=k$。
		用表格表示数量间的关系。
		用图像表示数量间的关系。
空间与图形	用字母表示公式	三角形面积：$S=\frac{1}{2}ab$。