前　言

数学是以数与形为主要研究对象的一门科学，对科学技术的进步发挥着基础理论和基础应用的作用。它作为一种普遍适用的技术，又是现代文化的重要组成部分，对形成人类的理性思维，促进人的智力发展具有不可替代的作用。

数学课程是中等职业学校学生必修的一门公共基础课，具有很强的工具功能。中等职业学校数学课程的学习要建立在九年义务教育基础上，是学生学习其他文化基础课程、专业课程以及职业生涯发展的基础。它对学生认识数学与自然界、与人类社会的关系，认识数学的科学价值、文化价值、应用价值，提高发现问题、分析和解决问题的能力，形成理性思维具有重要作用，对于学生智力的发展和个性的形成起着有效的促进作用。

本套教材分为《数学(职业模块 工科类)》和《数学(职业模块 财经、商贸及服务类)》。严格按照“教学大纲”规定的“教学内容与要求”进行编写，遵循“教学大纲”对认知要求和技能与能力要求的规定。

本套教材的编写特色主要体现在以下三个方面：

(1)关注时代发展，注重现代技术与传统数学的结合。随着时代的进步和发展，现代信息技术带来了数学教学手段和方法的革新。本教材根据 2019 年 10 月份教育部发布的《中等职业学校公共基础课程方案》和 2020 年 1 月发布的《中等职业学校数学课程标准》编写而成，注重培养学生利用现代技术解决数学问题的能力提高学生利用计算机软件进行数据处理的本领，同时也为教师提供了更为简洁、高效的教学方式。

(2)落实基础知识，注重中职数学教学实际和中职学生学习能力的结合。本教材的编写在严格遵循“课程标准”的基础上，结合中职数学教学实际和中职学生学习能力，在保证科学性和严谨性的基础之上，落实基础知识，对所学知识进行深入浅出的讲解，保证与九年义务教育以及专业课程的良好衔接。

(3)联系实际生活，注重数学知识与生活实践的结合。本教材在编写过程中，巧妙的联系生活，引导学生利用数学知识解决实际问题，使教师和学生可以在学习中进行良好的互动。因此在教材中设计了“想一想”“学习提示”“动手实践”“练一练”等板块，让学生的思维在学习过程中活跃起来，体会到学习的乐趣。有些章节最后还设置了“知识天地”，使学生在学习数学知识之余，体验到更加丰富的数学世界。

由于时间仓促、编者水平有限等原因，书中难免存在不足之处，敬请使用本套教材的师生提出宝贵的意见和建议，以便今后做进一步修订。

编　　者

目　录

第 1 章　三角计算及其应用

第 2 章　坐标变换与参数方程

第 3 章 复数及其应用

第 4 章 逻辑代数初步

第 5 章 算法与程序框图

第 1 章

三角计算及其应用

1.1　两角和差的余弦公式与正弦公式

1.1.1　两角和差的余弦公式

问题提出：

某城市的电视发射塔建在市郊的一座小山上. 如图 1—1 所示，在地平面上有一点 A，测得 A，C 两点间距离约为 60 米，从 A 观测电视发射塔的视角（$\angle CAD$）约为 45°，$\angle CAB=15^\circ$。求这座电视发射塔的高度.

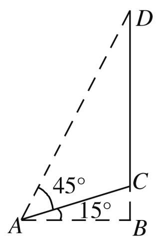

图 1—1

显然：

$$CD=BD-BC,BD=AB\tan60^\circ,$$
$$AB=60\cos15^\circ,BC=60\sin15^\circ.$$

那么：

$$\cos15^\circ=?$$
$$\sin15^\circ=?$$

思考：设 α，β 为两个任意角，你能判断 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha-\cos\beta$ 恒成立吗？举例说明.

想一想：

$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ-\cos30^\circ$ 成立吗？

显然：

$$\cos(30^\circ-30^\circ)\neq\cos30^\circ-\cos30^\circ.$$

两角和的余弦公式的推导：

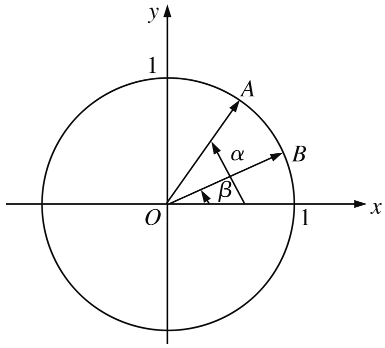

图 1—2

在单位圆(如图 1—2)中,设向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 与 x 轴正半轴的夹角分别为 α 和 β,则点 A 的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,点 B 的坐标为$(\cos\beta,\sin\beta)$.

因此向量 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,向量 $\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$,且 $|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=1$.

于是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$,

又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{1}$$

又 $\cos(\alpha+\beta)=\cos[\alpha-(-\beta)]$

$$=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

$$=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{2}$$

利用诱导公式可以证明,(1)、(2)两式对任意角都成立. 由此得到两角和与差的余弦公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta; \tag{1—1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{1—2}$$

公式(1—1)反映了 $\alpha+\beta$ 的余弦函数与 α,β 的三角函数值之间的关系;公式(1—2)反映了 $\alpha-\beta$ 的余弦函数与 α,β 的三角函数值之间的关系.

学习提示:

对于 α,β,只要知道其正弦或余弦,就可以求出 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$.

例 1 求 $\cos75°$的值.

解 可利用公式(1—1),将 75°角看作 45°角与 30°角之和,因此

$$\cos75°=\cos(45°+30°)$$

$$=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

学习提示：

把非特殊角拆分成特殊角的和或者差.

例 2 分别用 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 表示 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 与 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

解 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha$

$$=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

故 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

令 $\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，则 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$，代入上式得

$$\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),$$

即 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

例 3 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

解 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

由此得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

又因为 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，β 是第三象限角，

所以 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}.$$

例 4 求 $-\sin167^\circ\sin223^\circ+\sin257^\circ\sin313^\circ$的值.

解 原式 $=-\sin(180^\circ-13^\circ)\sin(180^\circ+43^\circ)+\sin(180^\circ+77^\circ)\sin(360^\circ-47^\circ)$

$=\sin13^\circ\sin43^\circ+\sin77^\circ\sin47^\circ$

$=\sin13^\circ\sin43^\circ+\cos13^\circ\cos43^\circ$

$=\cos(13^\circ-43^\circ)$

$=\cos(-30^\circ)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

例 5　设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，其中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

解　$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore\alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right),\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\frac{\beta}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$,

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\ \frac{\alpha}{2}-\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\begin{aligned}\therefore\cos\frac{\alpha+\beta}{2}&=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]\\&=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\\&=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.\end{aligned}$$

练一练

1. 求下列各式的值.

(1) $\cos345°$；　　(2) $\cos15°$.

2. 化简下列各式，并求值.

(1) $\cos(-40°)\cos20°-\sin(-40°)\sin(-20°)$；

(2) $\cos80°\cos35°+\cos10°\cos55°$.

1.1.2　两角和差的正弦公式

问题提出：

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=?$$

学习提示：

将 $(\alpha+\beta)$ 看作整体，这样才能应用公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

由于 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 对于任意角都成立，所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta\\&=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$$

由此得到,两角和与差的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, \quad (1-3)$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta. \quad (1-4)$$

例 6 求 $\sin15°$的值.

解 可以利用公式(1—4),将 15°角可以看作是 60°角与 45°角之差.

$$\begin{aligned}\sin15° &= \sin(60°-45°)\\ &= \sin60°\cos45°-\cos60°\sin45°\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例 7 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值.

解 由于 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},0\right)$,故

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) &= \sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{-4\sqrt{3}+3}{10}\\ &= \frac{3-4\sqrt{3}}{10}.\end{aligned}$$

例 8 求 $\sin105°\cos75°+\cos105°\sin75°$的值.

学习提示:

逆向使用公式是非常重要的,往往会带来新的思路,使问题简单化.

解 所给的式子恰好是公式(1—3)等号右边的形式,可以考虑逆向使用公式.

$$\begin{aligned}&\sin105°\cos75°+\cos105°\sin75°\\ &=\sin(105°+75°)\\ &=\sin180°=0.\end{aligned}$$

例 9 化简求值：$\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$.

解 原式$=\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

练一练

1. 求下列各式的值：

(1)$\sin75°$；(2)$\sin135°$；(3)$\sin105°$.

2. 化简下列各式并求值：

(1)$\sin25°\cos85°-\cos25°\sin85°$；

(2)$\sin20°\cos70°+\sin10°\sin50°$.

1.1.3 二倍角公式

首先要明确二倍角的概念：2α 是 α 的二倍角，3α 是$\frac{3\alpha}{2}$的二倍角，α 是$\frac{\alpha}{2}$的二倍角等，二倍角的实质是用一个角的三角函数表示这个角的二倍角的三角函数.

在公式(1—3)中，令 $\beta=\alpha$，可以得到二倍角的正弦公式：

$$\sin2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

即：

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1—5}$$

同理，公式(1—1)中，令 $\beta=\alpha$，可以得到二倍角的余弦公式：

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{1—6}$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以公式(1—6)又可以变形为：

$$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

或：

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

还可以变形为：

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2},$$

或：

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}.$$

公式(1—5)、(1—6)及其变形形式，反映出具有二倍关系的角的三角函数之间的关系，在三角形的计算中有着广泛的应用.

学习提示：

二倍角公式适用于所有具有二倍关系的角. 如 4α 与 2α，α 与$\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{2}$与$\frac{\alpha}{4}$等.

例 10 已知 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$，且 α 为第二象限的角，求 $\sin2\alpha$、$\cos2\alpha$ 的值.

解 因为 α 为第二象限的角，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

故

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{25}.$$

例 11 已知 $\cos\dfrac{\alpha}{2}=-\dfrac{1}{3}$，且 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，求 $\sin\alpha$、$\cos\dfrac{\alpha}{4}$的值.

解 $\dfrac{\alpha}{2}$与 α，$\dfrac{\alpha}{2}$与$\dfrac{\alpha}{4}$之间都是具有二倍关系的角，故可以使用二倍角公式来计算.

由 $\alpha\in(\pi,2\pi)$知$\dfrac{\alpha}{2}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

故 $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$.

由于$\dfrac{\alpha}{4}\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos^2\dfrac{\alpha}{4}=\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2}=\dfrac{1+\left(-\dfrac{1}{3}\right)}{2}=\dfrac{1}{3}$，所以

$$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

学习提示：

要用公式(1—6)及其变形公式求三角函数的值时，经常需要进行开方运算. 因此，要先确定角的范围.

例 12 化简：$\dfrac{2\cos^4x-2\cos^2x+\dfrac{1}{2}}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$.

解 原式$=\dfrac{2\cos^2x(\cos^2x-1)+\dfrac{1}{2}}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-2\cos^2x\sin^2x}{\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cos^2 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)}=\frac{1}{2}\cos2x.$$

学习提示：

二倍角余弦的三种形式的公式同等重要，公式 $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 的特点是公式的右边是平方差的形式，可以方便地进行因式分解；公式 $\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 和 $\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 是分别用角 α 的余弦与正弦中的一种函数来表示二倍角余弦；变形公式 $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}$ 和 $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}$ 的特点是公式的左边是关于三角函数的平方，右边是关于二倍角余弦的一次式.

例 13 设函数 $f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1(x\in\mathbf{R})$.

化简函数 $f(x)$ 的表达式.

解 $\because f(x)=2\cos^2x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=\cos2x+\sqrt{3}\sin2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\pi$.

练一练

1. 根据二倍角公式，完成下列各题：

(1)若 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}$，则 $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)=($　　$)$；

(2)若 $\cos=\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{4}{5}$，则 $\cos2\theta=($　　$)$.

2. 已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\frac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}$ 的值.

习题 1.1

1. 填空题：

已知 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)=m$，则 $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$ 的值为________.

2. 计算下列各式的值：

(1) $\sin105^\circ$；

(2) $\cos135^\circ$；

(3) $\cos275^\circ+\cos215^\circ+\cos75^\circ\cos15^\circ$；

(4) $\sin15^\circ\cdot\sin30^\circ\cdot\sin75^\circ$.

3. 已知△ABC 的三个内角满足：$A+C=2B$，$\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$ 的值.

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\dfrac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 的值.

1.2 正弦型函数

1.2.1 正弦型函数的概念和性质

我们已经学习了正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$. 在物理和电学中，经常遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的函数，这类函数叫作正弦型函数.

正弦型函数与正弦函数 $y=\sin x$ 有着密切的关系，在正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 中，令 $z=\omega x+\varphi$，则：

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z,$$

函数 $y=A\sin z$ 是正弦函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，周期为 2π，故函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，并且：

$$\begin{aligned}A\sin(\omega x+\varphi)&=A\sin z=A\sin(z+2\pi)\\&=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]\\&=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right],\end{aligned}$$

即 $f(x)=f\left(x+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$.

因此，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 也是周期函数，其周期为 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

由于函数 $y=\sin z$ 的最大值为 1，最小值为 -1，故 $y=A\sin z(A>0)$ 的最大值为 A，最小值为 $-A$. 即正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最大值为 A，最小值为 $-A$.

综上所述，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$，最大值为 A，最小值为 $-A$.

例 1 求函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期，并指出当角 x 取何值时函数取得最大值和最小值.

解 函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

设 $z=2x+\frac{\pi}{6}$，则 $x=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{12}$.

当 $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最大值，最大值为 2；

当 $z=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最小值，最小值为 -2.

所以，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值 2；

当 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最小值 -2.

学习提示：

解题过程中设新变量 z 的目的是突出、强化“变量替换”，熟练之后，可以省略设新变量的过程，将 $2x+\frac{\pi}{6}$ 看作一个整体，直接写出取得最大(小)值时的角.

一般地，研究函数 $y=a\sin x+b\cos x(a>0,b>0)$ 时，首先要把函数转化为 $y=A\sin(x+\theta)$ 的形式. 考察以 (a,b) 为坐标的点 P（如图 1—3），设以 OP 为终边的角为 θ，则：

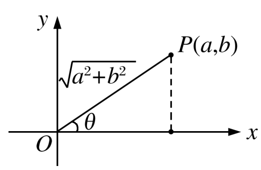

图 1—3

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\theta=\frac{b}{a}.$$

于是：

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),\end{aligned}$$

即 $A=\sqrt{a^2+b^2}$，角 θ 的值可以由 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 确定（角 θ 所在的象限与点 P 所在的象限相同）.

例 2 当角 x 为何值时，函数 $y=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ 取得最大值和最小值各是多少？

解 根据正弦函数的性质可知

$$\begin{aligned}y&=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x\\&=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x\\&=2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)\\&=2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x\right)\\&=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).\end{aligned}$$

故当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，y 取得最大值 2；

当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$ 时，y 取得最小值 -2.

练一练

1. 求下列函数的最大值、最小值和周期：

(1) $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(2) $y=\sqrt{3}\cos 2x$.

2. 求下列函数的最大值和最小值，并求出在什么情况下函数取得最大值和最小值：

(1) $y=\sin 2x-\cos 2x$；

(2) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1.2.2 正弦型函数的图像

与正弦函数图像的做法类似，可以用“五点法”作出正弦型函数的图像，正弦型函数的图像叫作正弦型曲线.

以下将以例 4 为例来做出正弦函数在一个周期内的图像.

例 4 作出函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在一个周期内的简图.

解 函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 与函数 $y=2\sin x$ 的周期都是 2π，最大值都是 2，最小值都是 -2.

为求出图像上五个关键点的横坐标，分别令 $t=x-\frac{\pi}{4}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$，求出对应的 x 值与函数 y 的值，列表 1—1 如下：

表 1—1

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0
$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	2	0	-2	0

以表中每组(x,y)的值为坐标，描出对应五个关键点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$、$\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$、$\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$、$\left(\frac{7\pi}{4},-2\right)$、$\left(\frac{9\pi}{4},0\right)$. 用光滑的曲线联结各点，得到函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的图像(如图 1—4).

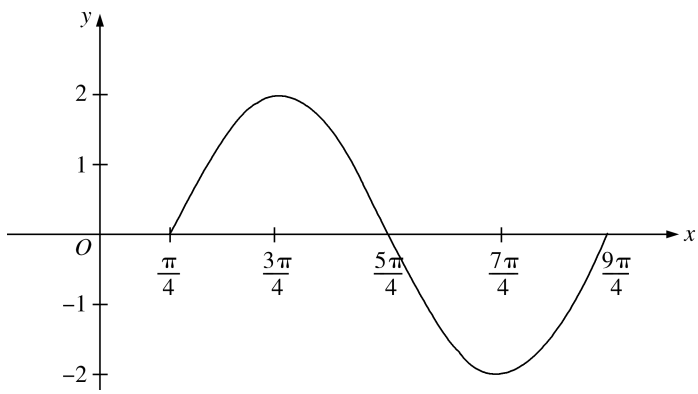

图 1—4

一般地，为了作出正弦型曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$，令 $t=\omega x+\varphi$，利用上面的方法，可以求得五个关键点的坐标为$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4},-A\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right)$.

例 5 利用"五点法"作出函数 $y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$在一个周期内的图像.

解 函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，且 $-\frac{\varphi}{\omega}=-\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{3}$，所以五个关键点为$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$，$\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{8\pi}{3},-2\right)$，$\left(\frac{11\pi}{3},0\right)$.

描出这五个点，然后用光滑的曲线联结各点，得到函数在一个周期内的图像(如图 1—5).

练一练

1. 利用"五点法"作出下列函数在一个周期内的图像：

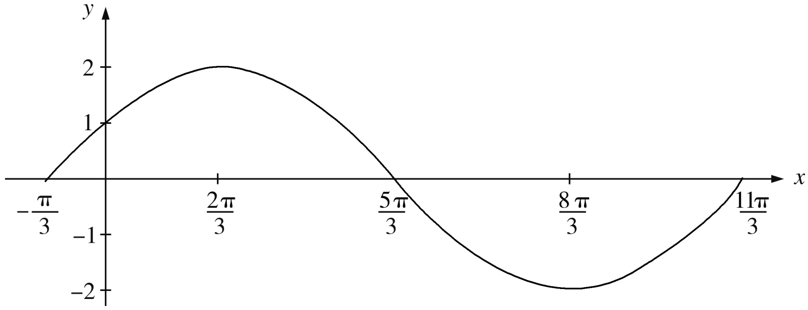

图 1—5

(1) $y=3\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)$；

(2) $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$.

1.2.3　正弦型函数的应用

由于本教材主要为工科机电类专业服务，所以，在正弦型函数的应用方面，本节不介绍传统的简谐振动，而把重点放在介绍简谐交流电的三要素和同频率的正弦量的合成上，正弦量的合成也只介绍同峰值的正弦量的合成，降低了难度. 电工实际计算中，一般是利用向量或复数进行计算.

在电学中，交变电流指电流强度的大小和方向都随时间变化的电流，简称交流电. 最简单的是简谐交流电，其电流的大小和方向随时间的变化情况，满足以下函数关系：

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_0)(I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi).$$

其中 I_m 是电流强度的最大值，叫作简谐交流电的峰值；$T=\frac{2\pi}{\omega}$叫作简谐交流电的变化周期，表示交流电完成一次周期性变化所需的时间，单位为 s(秒)；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数叫作频率，用 f 表示，$f=\frac{1}{T}$，单位为 Hz(赫兹)；$\omega t+\varphi_0$ 叫作相位，φ_0 叫作初相位. 峰值、频率和初相位是简谐交流电的三要素. 它们从三个不同的方面描述了简谐交流电的物理特征.

在物理学中，用 $s=A\sin(\omega t+\varphi_0)$表示简谐振动，$s$ 表示位移，A 叫作振幅；$T=\frac{2\pi}{\omega}$叫作简谐振动的变化周期；$f=\frac{1}{T}$叫作简谐振动的变化频率；$\omega t+\varphi_0$ 叫作相位；φ_0 叫作初相位.

例 6　已知交流电的电流强度 i(单位:A)随时间 t(单位:s)的函数关系为 $i=40\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$，写出电流的峰值、周期、频率和初相位.

解　峰值为 $I_m=40$(A)；

周期为 $T=\frac{20\pi}{100\pi}=0.02(\mathrm{s})$；

频率为 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.02}=50(\mathrm{Hz})$；

初相位为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

知识拓展：

例 6 表明了电学中的一个重要结论：只有初相位不同的两个正弦量的合成仍是正弦量，其频率和峰值不变，只有初相位发生变化.

例 7 设 $i_1=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$，$i_2=I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$，求 $i=i_1+i_2$.

知识拓展：

在电学中，同频率的正弦量（即形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的量）进行的求和运算，叫作同频率正弦量的合成.

解

$$\begin{aligned}i&=i_1+i_2=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)+I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=I\left(\sin\omega t\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\omega t\sin\frac{2\pi}{3}\right)+I\left(\sin\omega t\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\omega t\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\&=I\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)\sin\omega t+I\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cos\omega t\\&=I\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\sin\omega t+I\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cos\omega t\\&=-I\sin\omega t.\end{aligned}$$

练一练

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

（1）求 $f(x)$ 的振幅、最小正周期、初相位、峰值、频率；

（2）画出函数 $y=f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图像.

习题 1.2

1. 选择题：

（1）已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $\left(其中\ \omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则（　　）.