目　录

第 1 章　三角计算及其应用

第 2 章　坐标变换与参数方程

第 3 章　复数及其应用

第 4 章　逻辑代数初步

第 5 章 算法与程序框图

第 1 章 三角计算及其应用

1.1 两角和差的余弦公式与正弦公式

1.1.1 两角和差的余弦公式

某城市的电视发射塔建在市郊的一座小山上. 如图 1—1 所示，在地平面上有一点 A，测得 A，C 两点间距离约为 60 米，从 A 观测电视发射塔的视角（$\angle CAD$）约为 45°，$\angle CAB = 15^\circ$。求这座电视发射塔的高度.

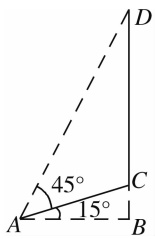


图 1—1

显然：

$$CD = BD - BC,\ BD = AB\tan 60^\circ,$$
$$AB = 60\cos 15^\circ,\ BC = 60\sin 15^\circ.$$

那么：

$$\cos 15^\circ = ?$$
$$\sin 15^\circ = ?$$

思考：设 α，β 为两个任意角，你能判断 $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha - \cos\beta$ 成立吗？举例说明.

想一想：

$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ - \cos 30^\circ$成立吗？

显然：

$$\cos(30^\circ - 30^\circ) \neq \cos 30^\circ - \cos 30^\circ.$$

两角和的余弦公式的推导：

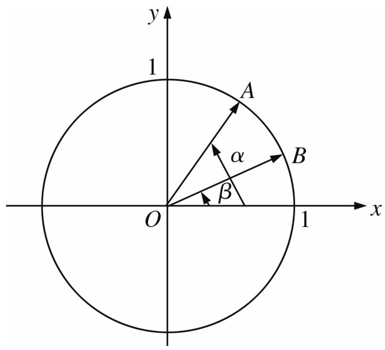


图 1—2

在单位圆(如图 1—2)中,设向量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 与 x 轴正半轴的夹角分别为 α 和 β,则点 A 的坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,点 B 的坐标为$(\cos\beta,\sin\beta)$.

因此向量 $\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,向量 $\overrightarrow{OB}=(\cos\beta,\sin\beta)$,且$|\overrightarrow{OA}|=1$,$|\overrightarrow{OB}|=1$.

于是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{OB}|\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)$.

又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$,

所以

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{1}$$

又

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\&=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)+\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)\\&=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta.\end{aligned} \tag{2}$$

利用诱导公式可以证明,(1)、(2)两式对任意角都成立.由此得到两角和与差的余弦公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta; \tag{1—1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta. \tag{1—2}$$

公式(1—1)反映了 $\alpha+\beta$ 的余弦函数与 α,β 的三角函数值之间的关系;公式(1—2)反映了 $\alpha-\beta$ 的余弦函数值与 α,β 的三角函数值之间的关系.

学习提示:

对于 α,β,只要知道其正弦和余弦,就可以求出 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$.

例 1 求 $\cos75°$的值.

解 可利用公式(1—1),将 75°角看作 45°角与 30°角之和,因此

$$\begin{aligned}\cos75°&=\cos(45°+30°)\\&=\cos45°\cos30°-\sin45°\sin30°\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

学习提示：

把非特殊角拆分成特殊角的和或者差.

例 2 分别用 $\sin\alpha$ 或 $\cos\alpha$ 表示 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 与 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

解 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha$

$=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$

故 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$.

令 $\frac{\pi}{2}-\alpha=\beta$，则 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta$，代入上式得

$$\cos\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),$$

即 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$.

例 3 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\cos\beta=-\frac{5}{13}$，$\beta$ 是第三象限角，求 $\cos(\alpha-\beta)$的值.

解 因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\sin\alpha=\frac{4}{5}$，

由此得 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$.

又因为 $\cos\beta=-\frac{5}{13}$，β 是第三象限角，

所以 $\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$.

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\left(-\frac{5}{13}\right)+\frac{4}{5}\times\left(-\frac{12}{13}\right)=-\frac{33}{65}.$$

例 4 求 $-\sin167^\circ\sin223^\circ+\sin257^\circ\sin313^\circ$的值.

解 原式 $=-\sin(180^\circ-13^\circ)\sin(180^\circ+43^\circ)+\sin(180^\circ+77^\circ)\sin(360^\circ-47^\circ)$

$=\sin13^\circ\sin43^\circ+\sin77^\circ\sin47^\circ$

$=\sin13^\circ\sin43^\circ+\cos13^\circ\cos43^\circ$

$=\cos(13^\circ-43^\circ)$

$=\cos(-30^\circ)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

例 5 设 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{9}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{2}{3}$，其中 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，求 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

解 $\because \alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \alpha-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$，$\frac{\alpha}{2}-\beta\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.

$\therefore \sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\alpha-\frac{\beta}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{81}}=\frac{4\sqrt{5}}{9}$，

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}-\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\begin{aligned}\therefore \cos\frac{\alpha+\beta}{2}&=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\right]\\&=\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\\&=-\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{4\sqrt{5}}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{7\sqrt{5}}{27}.\end{aligned}$$

练一练

1. 求下列各式的值.

(1) $\cos 345°$；　　　　(2) $\cos 15°$.

2. 化简下列各式，并求值.

(1) $\cos(-40°)\cos 20°-\sin(-40°)\sin(-20°)$；

(2) $\cos 80°\cos 35°+\cos 10°\cos 55°$.

1.1.2 两角和差的正弦公式

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=?$$

学习提示：

将 $(\alpha+\beta)$ 看作整体，这样才能应用公式 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

由于 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ 对于任意角都成立，所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)+\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)$

$=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta.$

由此得到，两角和与差的正弦公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta, \qquad (1-3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta. \qquad (1-4)$$

例 6 求 $\sin 15^\circ$的值.

解 可以利用公式(1—4)，将 15°角看作是 60°角与 45°角之差.

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ&=\sin(60^\circ-45^\circ)\\&=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

例 7 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，求 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$的值.

解 由于 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，故

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

所以

$$\begin{aligned}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)&=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{6}\\&=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{-4\sqrt{3}+3}{10}\\&=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}.\end{aligned}$$

例 8 求 $\sin 105^\circ\cos 75^\circ+\cos 105^\circ\sin 75^\circ$的值.

学习提示：

逆向使用公式是非常重要的，往往会带来新的思路，使问题简单化.

解 所给的式子恰好是公式(1—3)等号右边的形式，可以考虑逆向使用公式.

$$\begin{aligned}&\sin 105^\circ\cos 75^\circ+\cos 105^\circ\sin 75^\circ\\&=\sin(105^\circ+75^\circ)\end{aligned}$$

$=\sin 180°=0.$

例 9 化简求值：$\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+3x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)$.

解 原式 $=\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}.$

练一练

1. 求下列各式的值.

(1) $\sin 75°$；(2) $\sin 135°$；(3) $\sin 105°$.

2. 化简下列各式并求值.

(1) $\sin 25°\cos 85°-\cos 25°\sin 85°$；

(2) $\sin 20°\cos 70°+\sin 10°\sin 50°$.

1.1.3 二倍角公式

首先要明确二倍角的概念：2α 是 α 的二倍角，3α 是 $\frac{3\alpha}{2}$ 的二倍角，α 是 $\frac{\alpha}{2}$ 的二倍角等，二倍角的实质是用一个角的三角函数表示这个角的二倍角的三角函数.

在公式(1－3)中，令 $\beta=\alpha$，可以得到二倍角的正弦公式：

$$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

即

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{1-5}$$

同理，公式(1－1)中，令 $\beta=\alpha$，可以得到二倍角的余弦公式：

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{1-6}$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以公式(1－6)又可以变形为：

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

或

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

还可以变形为：

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

或

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

公式(1－5)、(1－6)及其变形形式，反映出具有二倍关系的角的三角函数之间的关系，在三角形的计算中有着广泛的应用.

学习提示：

二倍角公式适用于所有具有二倍关系的角．如 4α 与 2α，α 与 $\frac{\alpha}{2}$，$\frac{\alpha}{2}$ 与 $\frac{\alpha}{4}$ 等．

例 10 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，且 α 为第二象限的角，求 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$ 的值．

解 因为 α 为第二象限的角，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5},$$

故

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{7}{25}.$$

例 11 已知 $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$，且 $\alpha\in(\pi,2\pi)$，求 $\sin\alpha$ 和 $\cos\frac{\alpha}{4}$ 的值．

解 $\frac{\alpha}{2}$ 与 α，$\frac{\alpha}{2}$ 与 $\frac{\alpha}{4}$ 之间都是具有二倍关系的角，故可以使用二倍角公式来计算．

由 $\alpha\in(\pi,2\pi)$ 知 $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

故 $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{9}.$

由于 $\frac{\alpha}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos^2\frac{\alpha}{4}=\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{2}=\frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{2}=\frac{1}{3}$，所以

$$\cos\frac{\alpha}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

学习提示：

要用公式(1—6)及其变形公式求三角函数的值时，经常需要进行开方运算．因此，要先确定角的范围．

例 12 化简：$\dfrac{2\cos^4 x-2\cos^2 x+\frac{1}{2}}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$．

解 原式 $=\dfrac{2\cos^2 x(\cos^2 x-1)+\dfrac{1}{2}}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$

$$=\dfrac{\dfrac{1}{2}-2\cos^2 x\sin^2 x}{\dfrac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\dfrac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x}{\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}$$

$$=\dfrac{\dfrac{1}{2}\cos^2 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)}=\dfrac{1}{2}\cos 2x.$$

学习提示：

二倍角余弦公式的三种形式同等重要，公式 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 的特点是公式的右边是平方差的形式，可以方便地进行因式分解；公式 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ 和 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 是分别用角 α 的余弦与正弦中的一种函数来表示二倍角余弦；变形公式 $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 和 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ 的特点是公式的左边是关于三角函数的平方，右边是关于二倍角余弦的一次式.

例 13 设函数 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1(x\in\mathbf{R})$. 化简函数 $f(x)$ 的表达式.

解 $f(x)=2\cos^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x-1=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

练一练

1. 根据二倍角公式，完成下列各题：

(1) 若 $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{1}{4}$，则 $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+2\alpha\right)=($　　$)$；

(2) 若 $\cos=\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{4}{5}$，则 $\cos 2\theta=($　　$)$.

2. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求 $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 的值.

习题 1.1

1. 填空题.

　已知 $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha)=m$，则 $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$ 的值为________.

2. 计算下列各式的值.

　(1) $\sin105°$；

　(2) $\cos135°$；

　(3) $\cos275°+\cos215°+\cos75°\cos15°$；

　(4) $\sin15°\cdot\sin30°\cdot\sin75°$.

3. 已知△ABC 的三个内角满足：$A+C=2B$，$\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=-\dfrac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$的值.

4. 已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，求$\dfrac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$的值.

1.2　正弦型函数

1.2.1　正弦型函数的概念和性质

我们已经学习了正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$. 在物理和电学中，经常遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的函数，这类函数叫作正弦型函数.

正弦型函数与正弦函数 $y=\sin x$ 有着密切的关系，在正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$中，令 $z=\omega x+\varphi$，则：

$$y=A\sin(\omega x+\varphi)=A\sin z,$$

函数 $y=A\sin z$ 是正弦函数，其定义域为 $\mathbf{R}$，周期为 2π，故函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的定义域为 $\mathbf{R}$，并且：

$$\begin{aligned}A\sin(\omega x+\varphi)&=A\sin z=A\sin(z+2\pi)\\&=A\sin[(\omega x+\varphi)+2\pi]\\&=A\sin\left[\omega\left(x+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\varphi\right],\end{aligned}$$

即 $f(x)=f\left(x+\dfrac{2\pi}{\omega}\right)$.

因此，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$也是周期函数，其周期为$\dfrac{2\pi}{\omega}$.

由于函数 $y=\sin z$ 的最大值为 1，最小值为 -1，故 $y=A\sin z\,(A>0)$的最大值为 A，最小值为 $-A$. 即正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的最大值为 A，最小值为 $-A$.

综上所述，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$，最大值为 A，最小值为 $-A$.

例 1 求函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期，并指出当角 x 取何值时函数取得最大值和最小值.

解 函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

设 $z=2x+\frac{\pi}{6}$，则 $x=\frac{z}{2}-\frac{\pi}{12}$.

当 $z=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最大值，最大值为 2；

当 $z=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$，即 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}$ 时，函数 $y=2\sin z$ 有最小值，最小值为 -2.

所以，当 $x=k\pi+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最大值 2；

当 $x=k\pi+\frac{2\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$ 时，函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 取得最小值 -2.

学习提示：

解题过程中设新变量 z 的目的是突出、强化“变量替换”，熟练之后，可以省略设新变量的步骤，将 $2x+\frac{\pi}{6}$ 看作一个整体，直接写出取得最大（小）值时的角.

一般地，研究函数 $y=a\sin x+b\cos x(a>0,b>0)$ 时，首先要把函数转化为 $y=A\sin(x+\theta)$ 的形式. 考察以 (a,b) 为坐标的点 P（如图 1—3），设以 OP 为终边的角为 θ，则：

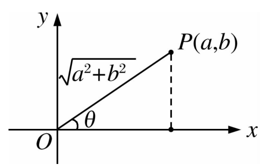


图 1—3

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\tan\theta=\frac{b}{a}.$$

于是：

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\sin x+\sin\theta\cos x)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta),\end{aligned}$$

即 $A=\sqrt{a^2+b^2}$，角 θ 的值可以由 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 确定（角 θ 终边所在的象限与点 P 所在的象限相

同).

例 2 当角 x 为何值时,函数 $y=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$ 取得最大值和最小值?各是多少?

解 根据正弦函数的性质可知

$$\begin{aligned} y &= 2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x \\ &= \sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right) \\ &= 2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x\right) \\ &= 2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

故当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$,即 $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$时,$y$ 取得最大值 2;

当 $2x-\frac{\pi}{3}=2k\pi-\frac{\pi}{2}$,即 $x=k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$时,$y$ 取得最小值-2.

练一练

1. 求下列函数的最大值、最小值和周期.

(1) $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;

(2) $y=\sqrt{3}\cos 2x$.

2. 求下列函数的最大值和最小值,并求出在什么情况下函数取得最大值和最小值.

(1) $y=\sin 2x-\cos 2x$;

(2) $y=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

1.2.2 正弦型函数的图像

与正弦函数图像的作法类似,可以用“五点法”作出正弦型函数的图像.正弦型函数的图像叫作正弦型曲线.

下面将以例 4 为例来做出正弦函数在一个周期内的图像.

例 4 作出函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的简图.

解 函数 $y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$与函数 $y=2\sin x$ 的周期都是 2π,最大值都是 2,最小值都是-2.

为求出图像上五个关键点的横坐标,分别令 $t=x-\frac{\pi}{4}=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2},2\pi$,求出对应的 x 值与函数 y 的值,列表 1-1 如下:

表 1—1

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$
$x-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	1	0	-1	0
$2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	0	2	0	-2	0

以表中每组(x,y)的值为坐标，描出对应五个关键点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$、$\left(\frac{3\pi}{4},2\right)$、$\left(\frac{5\pi}{4},0\right)$、$\left(\frac{7\pi}{4},-2\right)$、$\left(\frac{9\pi}{4},0\right)$. 用光滑的曲线连接各点，得到函数$y=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$在一个周期内的图像（如图 1—4）.

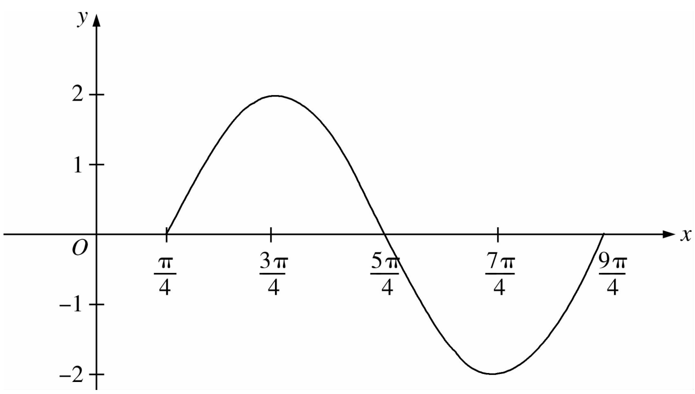


图 1—4

一般地，为了作出正弦型曲线$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$，令$t=\omega x+\varphi$，利用上面的方法，可以求得五个关键点的坐标为$\left(-\frac{\varphi}{\omega},0\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{4},A\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{T}{2},0\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+\frac{3T}{4},-A\right)$，$\left(-\frac{\varphi}{\omega}+T,0\right)$.

例 5 利用“五点法”作出函数$y=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$在一个周期内的图像.

解 函数的周期为$T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，且$-\frac{\varphi}{\omega}=-\frac{\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{3}$，所以五个关键点为$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},2\right)$，$\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$，$\left(\frac{8\pi}{3},-2\right)$，$\left(\frac{11\pi}{3},0\right)$.

描出这五个点，然后用光滑的曲线连接各点，得到函数在一个周期内的图像（如图 1—5）.

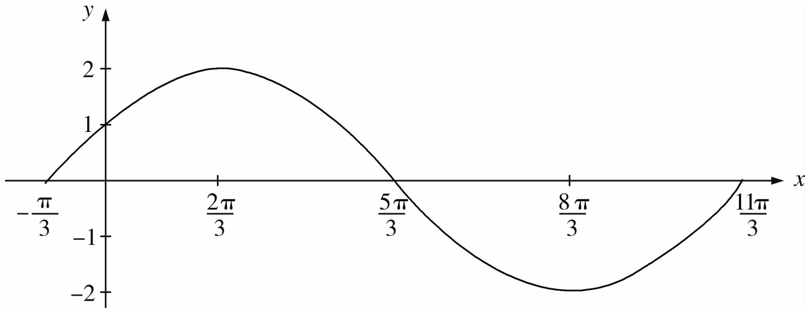


图 1—5

练一练

利用“五点法”作出下列函数在一个周期内的图像.

(1) $y=3\sin\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)$;

(2) $y=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)$.

1.2.3 正弦型函数的应用

由于本教材主要为工科机电类专业服务，所以，在正弦型函数的应用方面，本节不介绍传统的简谐振动，而把重点放在介绍简谐交流电的三要素和同频率的正弦量的合成上，正弦量的合成也只介绍同峰值的正弦量的合成，降低了难度. 电工实际计算中，一般是利用向量或复数进行计算.

在电学中，交变电流指电流强度的大小和方向都随时间变化的电流，简称交流电. 最简单的是简谐交流电，其电流的大小和方向随时间的变化情况，满足以下函数关系：

$$i=I_m\sin(\omega t+\varphi_0)(I_m>0,\omega>0,-\pi\leqslant\varphi_0\leqslant\pi).$$

其中 I_m 是电流强度的最大值，叫作简谐交流电的峰值；$T=\frac{2\pi}{\omega}$叫作简谐交流电的变化周期，表示交流电完成一次周期性变化所需的时间，单位为 s(秒)；单位时间内，交流电完成周期性变化的次数叫作频率，用 f 表示，$f=\frac{1}{T}$，单位为 Hz(赫兹)；$\omega t+\varphi_0$ 叫作相位，φ_0 叫作初相位. 峰值、频率和初相位是简谐交流电的三要素. 它们从三个不同的方面描述了简谐交流电的物理特征.

例 6 已知交流电的电流强度 i(单位:A)与时间 t(单位:s)的函数关系为 $i=40\sin\left(100\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$，写出电流的峰值、周期、频率和初相位.

解 峰值为 $I_m=40(\mathrm{A})$；

周期为 $T=\frac{2\pi}{100\pi}=0.02(\mathrm{s})$；

频率为 $f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.02}=50(\mathrm{Hz})$；

初相位为 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

知识拓展：

例 6 表明了电学中的一个重要结论：只有初相位不同的两个正弦量的合成仍是正弦量，其频率和峰值不变，只有初相位发生变化.

例 7 设 $i_1=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)$，$i_2=I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)$，求 $i=i_1+i_2$.

知识拓展：

在电学中，同频率的正弦量（即形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的量）进行的求和运算，叫作同频率正弦量的合成.

解
$$\begin{aligned}i&=i_1+i_2=I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)+I\sin\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)\\&=I\left(\sin\omega t\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\omega t\sin\frac{2\pi}{3}\right)+I\left(\sin\omega t\cos\frac{4\pi}{3}+\cos\omega t\sin\frac{4\pi}{3}\right)\\&=I\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)\sin\omega t+I\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right)\cos\omega t\\&=I\left[\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\sin\omega t+I\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\cos\omega t\\&=-I\sin\omega t.\end{aligned}$$

练一练

已知函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

(1)求 $f(x)$的振幅、最小正周期、初相位、峰值、频率；

(2)画出函数 $y=f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的图像.

习题 1.2

1. 选择题：

(1)已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$$\left(\text{其中 }\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则(　　)

A. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{3}$　　C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{3}$

(2)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(x\in\mathbf{R},A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的图像(部分)如图 1—6 所示,则 $f(x)$的解析式是(　　)

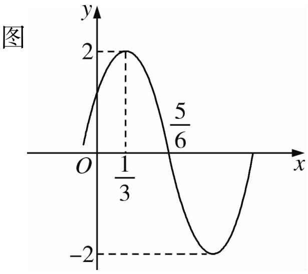


图 1—6

A. $f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$

B. $f(x)=2\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{6}\right)(x\in\mathbf{R})$

C. $f(x)=2\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$

D. $f(x)=2\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{3}\right)(x\in\mathbf{R})$

(3)已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),x\in\mathbf{R}$,则下列结论中正确的是(　　)

A. $f(x)$是最小正周期为 π 的奇函数

B. $x=\frac{\pi}{3}$是函数 $f(x)$图像的一条对称轴

C. $f(x)$图像的一个对称中心是$\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

D. 将函数 $y=\sqrt{3}\sin2x$ 的图像向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位可得到函数 $f(x)$的图像

2. 填空题:

(1)已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+n$ 的最大值为 4,最小值为 0,最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,直线 $x=\frac{\pi}{3}$是其图像的一条对称轴,若 $A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,则函数解析式为________.

(2)若两个函数的图像只经过若干次平移后就能够重合,则称这两个函数为“同形”函数.给出下列函数:① $f_1(x)=\sin x+\cos x$,② $f_2(x)=\sin x$,③ $f_3(x)=\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}$,④ $f_4(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$,其中“同形”函数有________.(填序号)

3. 用“五点法”画出下列函数的图像:

(1) $y=\sqrt{3}\sin\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$;

(2) $y=2\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},x\in\mathbf{R})$的图像的一部分如图 1—7 所示.

(1)求函数 $f(x)$的解析式;

(2) 当 $x\in\left[-6,-\frac{2}{3}\right]$ 时，求函数 $y=f(x)+f(x+2)$ 的最大值与最小值及相应的 x 的值.

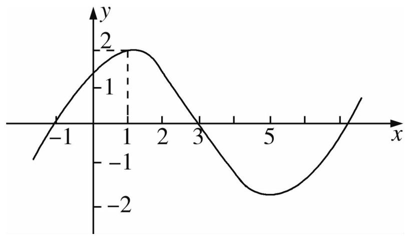


图 1－7

1.3　正弦定理与余弦定理

1.3.1　正弦定理

我们知道，在直角三角形 ABC（如图 1－8）中，$\frac{a}{c}=\sin A$，$\frac{b}{c}=\sin B$，即：

$$\frac{a}{\sin A}=c,\ \frac{b}{\sin B}=c,$$

由于 $C=90°$，所以 $\sin C=1$.

于是：

$$\frac{c}{\sin C}=c.$$

所以：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

想一想：

在任意三角形中，是否也存在类似的数量关系呢？

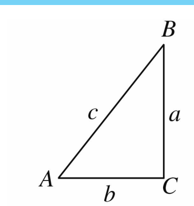


图 1－8

当三角形为钝角三角形时，不妨设角 A 为钝角，如图 1－9 所示.

以 A 为原点，以射线的方向为轴的正方向，建立直角坐标系，则 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$，两边取与 y 轴上的单位向量 $\boldsymbol{j}$ 的数量积，得：

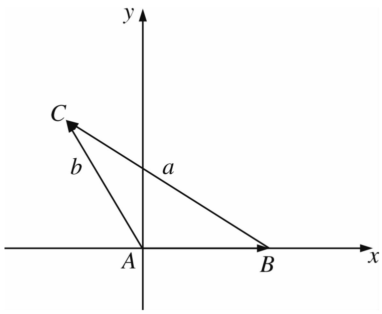


图 1—9

$$\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{j}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{BA}+\boldsymbol{j}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

由于$<\boldsymbol{j},\overrightarrow{BC}>=90°-B$，$\boldsymbol{j}\perp\overrightarrow{BA}$，$<\boldsymbol{j},\overrightarrow{AC}>=A-90°$，设与角 A，B，C 相对应的边长分别为 a，b，c，故

$$a\cos(90°-B)=0+b\cos(A-90°),$$

即：

$$a\sin B=b\sin A.$$

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

同理可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

即：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin C}.$$

当三角形为锐角三角形时，同样可以得到这个结论。于是得到正弦定理：

在三角形中，各边与它所对的角的正弦之比相等，即：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin b}=\frac{c}{\sin C}. \tag{1—7}$$

利用正弦定理可以求解下列问题：

(1)已知三角形的两个角和任意一边，求其他两边和一角.

(2)已知三角形的两边和其中一边所对角，求其他两角和一边.

例 1　已知在$\triangle ABC$ 中，$B=30°$，$C=135°$，$c=6$，求 b.

解　这是已知三角形的两个角和一边，求其他边的问题，可以直接应用正弦定理.

由于

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

所以

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{6\times\sin30^\circ}{\sin135^\circ}=\frac{6\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=3\sqrt{2}.$$

例 2 已知在$\triangle ABC$中，$A=30^\circ$，$a=15\sqrt{2}$，$b=30$，求 B.

学习提示：

已知三角形的两边和其中一边的对角，利用正弦定理求另一边的对角时，需要讨论这个角的取值范围，以免发生错误.

解 这是已知三角形的两边和一边的对角，求另一边的对角，可以首先直接应用正弦定理求出角的正弦值，然后再求出角.

由于

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},$$

所以

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{30\times\sin30^\circ}{15\sqrt{2}}=\frac{30\times\frac{1}{2}}{15\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 $b>a$，知 $B>A$，

故 $30^\circ<B<180^\circ$，

所以 $B=45^\circ$或 $B=135^\circ$.

例 3 已知在$\triangle ABC$中，$A=45^\circ$，$a=30$，$b=15\sqrt{2}$，求 B.

解

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{15\sqrt{2}\times\sin45^\circ}{30}=\frac{1}{2}.$$

由于 $b<a$，所以 $B<A$，

即 $0^\circ<B<45^\circ$，所以 $B=30^\circ$.

练一练

1. 已知在$\triangle ABC$中，$A=21^\circ$，$B=105^\circ$，$c=4$，求 C 和 b（精确到 0.01）.
2. 在$\triangle ABC$中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c. 已知 $a=5\sqrt{2}$，$c=10$，$A=30^\circ$，求 B.

1.3.2 余弦定理

如图 1—10 所示，在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，所以：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\\&=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A.\end{aligned}$$

即：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

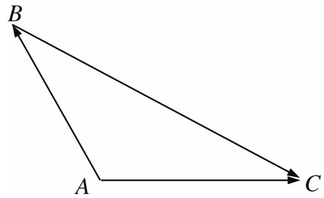


图 1—10

同理可得：

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

于是得到余弦定理：三角形中任意一边的平方等于其余两边的平方和减去这两边与其夹角余弦乘积的两倍. 即：

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A;\\ b^2&=a^2+c^2-2ac\cos B;\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}\tag{1—8}$$

显然，当 $C=90°$时，有 $c^2=a^2+b^2$。这就是说，勾股定理是余弦定理的特例.

公式(1—8)经变形后可以写成：

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};\\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.\end{aligned}\tag{1—9}$$

利用余弦定理可以求解下列问题：

(1)已知三角形的两边和它们的夹角，求第三边和其他的两个角.

(2)已知三角形的三边，求三个角.

例 4 在$\triangle ABC$ 中，$A=60°$，$b=8$，$c=3$，求 a.

解 这是已知三角形的两边和它们的夹角，求第三边的问题，可以直接应用余弦定理. 因为

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ &=8^2+3^2-2\times8\times3\times\cos60°=49,\end{aligned}$$

所以

$$a=7.$$

例 5 在$\triangle ABC$ 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边. 若$\dfrac{\sin C}{\sin A}=2$，$b^2-a^2=3ac$，求角 B.

解 由正弦定理可得：

$$\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{c}{a}=2\Rightarrow c=2a,$$

又 $b^2-a^2=3ac\Rightarrow b^2=7a^2$，

由余弦定理可得：

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{-2a^2}{4a^2}=-\frac{1}{2},$$

又 $B\in(0,\pi)$，

所以角 $B=120°$.

例 6 在△ABC 中，a，b，c 分别为角 A，B，C 的对边，若 $a=2b\cos C$，确定此三角形的形状.

解 在给定的边与角的关系式中，可以用余弦定理，得：

$$a=2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

化简可得：

$$a^2=a^2+b^2-c^2,$$

即 $b^2=c^2$，$b=c$.

所以三角形 ABC 是等腰三角形.

练一练

1. 在△ABC 中，$B=150°$，$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，求 b.

2. 在△ABC 中，三边之比 $a:b:c=3:5:7$，求三角形最大内角.

1.3.3 正弦定理与余弦定理的应用

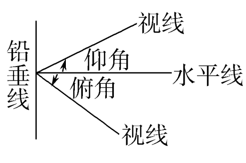
在实际问题中，经常需要计算高度、长度、距离和角的大小，这类问题中有许多与三角形有关，可以归结为解三角形问题，需要用正弦定理、余弦定理等三角函数知识来解决.

1. 用正弦定理和余弦定理解三角形的常见题型

测量距离问题、高度问题、角度问题、计算面积问题、航海问题、物理问题等.

2. 实际问题中的常用角

(1) 仰角和俯角：与目标线在同一铅垂平面内的水平视线和目标视线的夹角，目标视线在水平视线上方的角叫仰角，目标视线在水平视线下方的角叫俯角（如图 1—11①）.



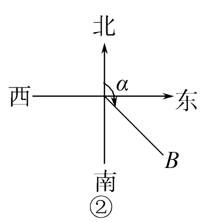


图 1—11

(2) 方向角：相对于某正方向的水平角，如南偏东 30°，北偏西 45°，西偏北 60°等.

(3) 方位角：指从正北方向顺时针转到目标方向线的水平角，如 B 点的方位角为 α（如图

1－11②).

(4)坡度:坡面与水平面所成的二面角的度数.

3.解三角形应用题的一般步骤

(1)阅读理解题意,弄清问题的实际背景,明确已知与未知,理清量与量之间的关系.侧重考查从实际问题中提炼数学问题的能力.

(2)根据题意画出示意图,将实际问题抽象成解三角形问题的模型.

(3)根据题意选择正弦定理或余弦定理求解.

(4)将三角形问题还原为实际问题,注意实际问题中的有关单位问题、近似计算的要求等.

4.解三角形应用题常有的两种情形

(1)实际问题经抽象概括后,已知量与未知量全部集中在一个三角形中,可用正弦定理或余弦定理求解.

(2)实际问题经抽象概括后,已知量与未知量涉及到两个或两个以上的三角形,这时需作出这些三角形,先解满足条件的三角形,然后逐步求解其他三角形,有时需设出未知量,从几个三角形中列出方程(组),解方程(组)得出所要求的解.

例 7 三个力 F_1,F_2,F 作用于一点 O(如图 1－12)并且处于平衡状态,已知 F_1,F_2 的大小分别为 100N,120N,F_1,F_2 的夹角是 60°,求 F 的大小(精确到 1N)和方向.

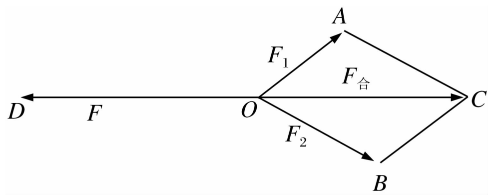


图 1－12

解 由向量加法的平行四边形法则知,向量 $\overrightarrow{OC}$ 表示 F_1,F_2 的合力 $F_合$.由力的平衡原理知,F 应在 $\overrightarrow{OC}$ 的反向延长线上,且大小与 $F_合$ 相等.

在△OAC 中,$\angle OAC=180°-60°=120°$,$OA=100$, $AC=OB=120$,由余弦定理得:

$$\begin{aligned}OC&=\sqrt{OA^2+AC^2-2OA\cdot AC\cdot\cos120°}\\&=\sqrt{100^2+120^2-2\times100\times120\times\cos120°}\\&\approx191(\mathrm{N}).\end{aligned}$$

在△AOC 中,由正弦定理,得:

$$\sin\angle AOC=\frac{120\times\sin120°}{191}\approx0.5441,$$

所以$\angle AOC\approx33°$,F 与 F_1 间的夹角是 $180°-33°=147°$.

所以 F 约为 191N,F 与 $F_合$ 的方向相反,且与 F_1 的夹角约为 147°.

例 8 如图 1－13 所示,A,B,C,D 都在同一个与水平面垂直的平面内,B,D 为两岛上的两座灯塔的塔顶.测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 75°,30°,于水面 C 处测得 B 点和

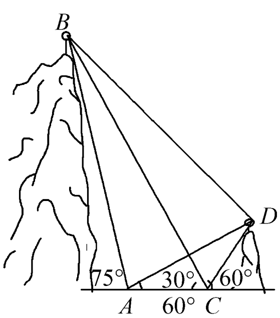


图 1－13

D 点的仰角均为 $60°$，$AC=0.1$ km.

学习提示：

(1)利用示意图把已知量和待求量尽量集中在有关的三角形中，建立一个解三角形的模型.

(2)利用正、余弦定理解出所需要的边和角，求得该数学模型的解.

(3)应用题要注意作答.

(1)求证：$AB=BD$；

(2)求 B 与 D 的距离.

解　(1)在$\triangle ACD$ 中，$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=60°-\angle DAC=30°$，

所以 $CD=AC=0.1$.

又$\angle BCD=180°-60°-60°=60°$，

故 CB 是等腰$\triangle CAD$ 底边 AD 的中垂线，所以 $BD=BA$.

(2)在$\triangle ABC$ 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle BCA}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

即：

$$AB=\frac{AC\sin 60°}{\sin 15°}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}(\text{km}).$$

因此

$$BD=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}(\text{km}).$$

故 B 与 D 的距离为$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$km.

例 9　隔河观察两目标 A 与 B. 在岸边先选取相距$\sqrt{3}$千米的 C，D 两点，同时测得$\angle ACB=75°$，$\angle BCD=45°$，$\angle ADC=30°$，$\angle ADB=45°$（A，B，C，D 在同一平面内），求两目标 A，B 之间的距离.

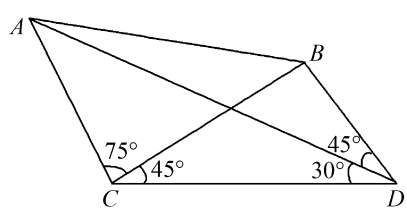


图 1—14

解　如题图 1—14 所示，在$\triangle ACD$ 中，

$\because \angle ADC=30°$，$\angle ACD=120°$，

$\therefore \angle CAD=30°$，$AC=CD=\sqrt{3}$（千米）.

在$\triangle BDC$ 中，$\angle CBD=180°-45°-75°=60°$.

由正弦定理,可得:

$$BC=\frac{\sqrt{3}\sin 75^{\circ}}{\sin 60^{\circ}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}(\text{千米}).$$

在$\triangle ABC$中,由余弦定理,可得:

$$AB^{2}=AC^{2}+BC^{2}-2AC\cdot BC\cdot\cos\angle BCA,$$

即:

$$AB^{2}=(\sqrt{3})^{2}+\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{2}-2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 75^{\circ}=5,$$

$\therefore AB=\sqrt{5}$(千米).所以两目标A,B间的距离为$\sqrt{5}$千米.

例 10 某兴趣小组要测量电视塔AE的高度H(单位:m),如图1—15所示,垂直放置的标杆BC的高度$h=4$ m,仰角$\angle ABE=\alpha$,$\angle ADE=\beta$.

(1)该小组已测得一组α和β的值,算出了$\tan\alpha=1.24$,$\tan\beta=1.20$,请据此算出H的值;

(2)该小组分析若干个测得的数据后,认为适当调整标杆到电视塔的距离d(单位:m),使α与β之差较大,可以提高测量精度.若电视塔的实际高度为125 m,试问d为多少时,$\alpha-\beta$最大?

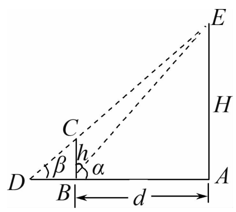


图1—15

学习提示:

(1)测量高度时,要准确理解仰角和俯角的概念.

(2)分清已知量和待求量,分析(画出)示意图,明确哪个三角形应用正弦定理,哪个三角形应用余弦定理.

(3)注意竖直线垂直于地面构成的直角三角形.

解 (1)由$AB=\frac{H}{\tan\alpha}$,$BD=\frac{h}{\tan\beta}$,$AD=\frac{H}{\tan\beta}$及$AB+BD=AD$得:

$$\frac{H}{\tan\alpha}+\frac{h}{\tan\beta}=\frac{H}{\tan\beta}.$$

解得:

$$H=\frac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{4\times 1.24}{1.24-1.20}=124.$$

因此,算出的电视塔的高度H是124 m.

(2)由题设知$d=AB$,得:

$$\tan\alpha=\frac{H}{d}.$$

由 $AB=AD-BD=\frac{H}{\tan\beta}-\frac{h}{\tan\beta}$，得：

$$\tan\beta=\frac{H-h}{d},$$

所以：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{h}{d+\frac{H(H-h)}{d}}\leqslant\frac{h}{2\sqrt{H(H-h)}},$$

当且仅当：

$$d=\frac{H(H-h)}{d}，即\ d=\sqrt{H(H-h)}=\sqrt{125\times(125-4)}=55\sqrt{5}\ 时，$$

上式取等号.

所以当 $d=55\sqrt{5}$ 时，$\tan(\alpha-\beta)$ 最大.

因为 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，

所以当 $d=55\sqrt{5}$ 时，$\alpha-\beta$ 最大.

故所求的 d 是 $55\sqrt{5}$ m.

练一练

一个零件尺寸如图 1—16 所示，加工后要检验 A，B 两孔的距离，试计算孔距 AB(精确到 0.01).

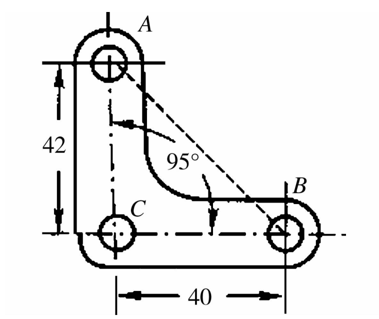


图 1—16

习题 1.3

1. 填空题：

(1)$\triangle ABC$ 中，若 $a^2=b^2+c^2-bc$，则 $A=$________.

(2)在$\triangle ABC$中,已知$AB=4\sqrt{3}$,$AC=4$,$\angle B=30°$,则$\triangle ABC$的面积是________.

(3)在$\triangle ABC$中,已知$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$,则这个三角形的形状是________.

(4)在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$A=\frac{\pi}{3}$,$a=\sqrt{3}$,$b=1$,则$c=$________.

2. 已知在$\triangle ABC$中,$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{b+c}{2c}$,求$\triangle ABC$的形状.

3. 在$\triangle ABC$中,$A=60°$,$a=4\sqrt{3}$,$b=4\sqrt{2}$,求B.

4. 如图1—17所示,测量河对岸的塔高AB时,可以选与塔底B在同一水平面内的两个测点C与D,现测得$\angle BCD=\alpha$,$\angle BDC=\beta$,$CD=s$,并在点C测得塔顶A的仰角为θ,求塔高AB.

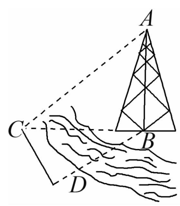


图1—17

5. 在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c,已知$a=2$,$c=5$,$\cos B=\frac{3}{5}$.

(1)求b的值;

(2)求$\sin C$的值.

1.4 三角计算及其应用举例

在前面一节中,我们已经简单介绍了正弦定理和余弦定理的应用,下面将进一步探寻三角计算在生产、生活中的广泛应用.

1. 斜度

斜度是指一条直线(或一个平面)相对另一条直线(或另一个平面)的倾斜程度,常用字母K表示.其大小为这两条直线(或两个平面)夹角的正切值.例如,在图1—18所示的斜键中,斜度

$$K=\tan\alpha=\frac{H-h}{L}. \tag{1—10}$$

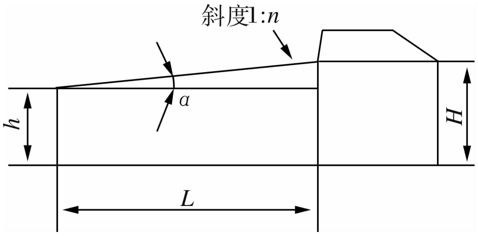


图 1—18

习惯上，斜度常用比例或分式的形式表示，例如，斜度为 1∶10 或$\frac{1}{10}$.

斜度 1∶n 的含义是：在 $n$mm 内，高度相差 1mm. 角 α 叫作斜角.

知识拓展：

在机械加工中，为保证零件的装配和使用要求，必须随时对加工零件进行测量.

对工件进行角度、锥度测量，比较普遍的方法是间接用钢球、圆柱和量块等工具，测量出与其有关的线值尺寸，通过三角形计算求得角度和锥度值.

2. 锥度

锥度是指圆锥的底面直径与锥体高度之比，常用字母 C 表示. 如果是圆台，则为上、下两圆的直径差与圆台高度之比值. 图 1—19 所示的圆台零件的锥度为：

$$C=\frac{D-d}{L}. \tag{1—11}$$

图 1—19 中角 α 叫作圆锥角，角$\frac{\alpha}{2}$叫作圆锥半角.

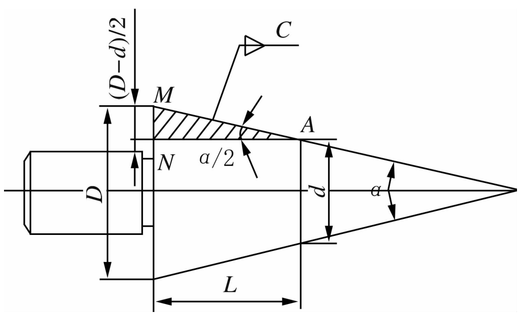


图 1—19

在阴影所示的直角三角形中，由于 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{D-d}{2L}$，所以：

$$2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{D-d}{L}=C.$$

所以：

$$C=2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{n}.$$

锥度一般用比例或分式的形式表示，例如，C 为 $1:20$ 或 $\frac{1}{20}$.

例 1　有一个外圆锥，已知其最大直径 $D=20\text{mm}$，最小直径 $d=15\text{mm}$，圆锥长度 $L=100\text{mm}$，试求其锥度 C、圆锥半角 $\frac{\alpha}{2}$ 与圆锥角 α（精确到 $1'$）.

解　由于 $C=\frac{D-d}{L}=\frac{20-15}{100}=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$，所以：

$$C=1:20\text{ 或 }\frac{1}{20}.$$

由 $C=2\tan\frac{\alpha}{2}$ 得：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{C}{2}=\frac{1}{2\times 20}=\frac{1}{40}=0.025,$$

所以：

$$\frac{\alpha}{2}\approx 1°25'56'',$$

$$\alpha\approx 2°52''.$$

3. 弓形

在一个圆中作一条弦，由弦及其所对的弧组成的图形叫作弓形. 这段弧叫作弓形的弧. 垂直于弦的直径，被弦分为两部分，分别为两个弓形的高. 如图 1—20 所示，上部为一个弓形，d 表示弓形所在圆的直径，L 表示弓形的弦长，h 表示弓形的高.

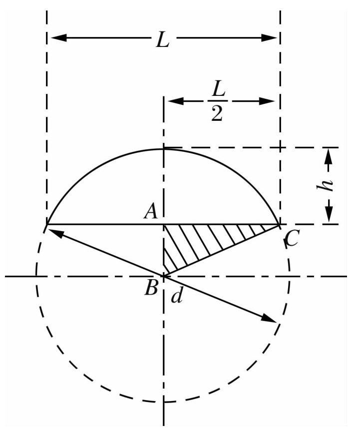


图 1—20

在 Rt△ABC 中，由勾股定理得

$$AB^2+AC^2=BC^2.$$

而

$$BC=\frac{d}{2},AB=\frac{d}{2}-h,AC=\frac{L}{2},$$

故

$$\left(\frac{d}{2}-h\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2,$$

整理得

$$d=h+\frac{L^2}{4h}. \tag{1-12}$$

将上式变形得到 $$L^2=4h(d-h),$$

解得

$$L=2\sqrt{h(d-h)}, \tag{1-13}$$

$$h=\frac{d\pm\sqrt{d^2-L^2}}{2}. \tag{1-14}$$

公式(1－14)中，当弓形小于半圆（圆弧为劣弧）时取“－”号，大于半圆（圆弧为优弧）时取“＋”号.

例 2 如图 1－21 所示，一个轴的直径为 22mm，端部圆头半径为 20mm，求圆头部分的高度 h.

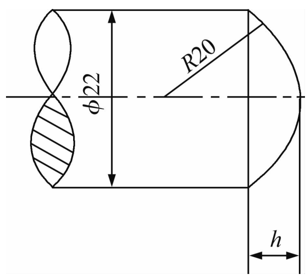


图 1－21

解 此问题就是求弓形的高.

利用公式(1－14)(公式中取“－”)，得：

$$h=\frac{d-\sqrt{d^2-L^2}}{2}=\frac{40-\sqrt{40^2-22^2}}{2}\approx 3.3(\text{mm}).$$

4. 角 x

现有宽分别为 a，b 的两块铁板（如图 1－22），要对接焊接成 θ 角，怎样下料呢？

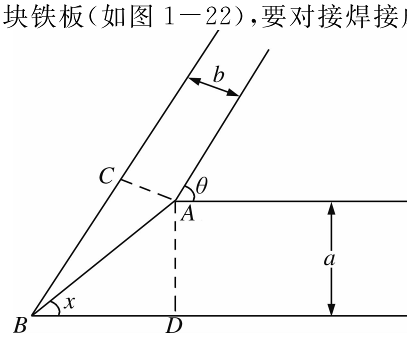


图 1－22

过点 A 作 $\angle CBD$ 两边的垂线 AC，AD，垂足为 C，D. 设 $\angle ABD=x$，则下料的关键是计算 x. 只要计算出 x，则 $\angle ABC=\theta-x$. 按照这两个角度，沿 AB 焊接即可对接成图中所示的角 θ.

下面来计算角 x.

在 Rt$\triangle ABD$ 和 Rt$\triangle ACB$ 中，设 AB 的长为 m，则：

$$m\sin x=a,\ m\sin(\theta-x)=b.$$

于是

$$\frac{b}{a}\sin x=\sin(\theta-x),$$

$$\frac{b}{a}\sin x=\sin(\theta-x)=\sin\theta\cos x-\cos\theta\sin x,$$

即

$$\sin x=\frac{\sin\theta}{\frac{b}{a}+\cos\theta}\cos x,$$

所以

$$\tan x=\frac{a\sin\theta}{b+a\cos\theta}. \tag{1—15}$$

特别是当 $a=b$ 时，

$$\tan x=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2},$$

即

$$\tan x=\tan\frac{\theta}{2}. \tag{1—16}$$

由于 $0<x<\theta<\pi$，故此时 $x=\frac{\theta}{2}$.

例 3　某车间要利用宽为 4cm 和 8cm 的钢板，焊接一批如图 1—23 所示的角铁，问下料时角 x 应取多大(精确到 $1'$).

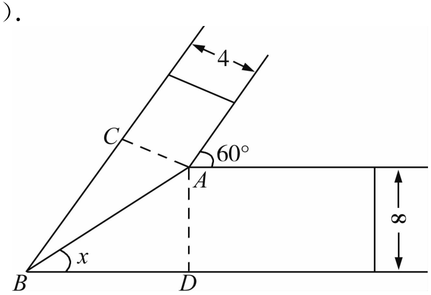


图 1—23

解 利用公式(1－15)得：

$$\tan x=\frac{a\sin\theta}{b+a\cos\theta}=\frac{8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{4+8\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由于 $0°<x<180°$，

所以 $x\approx40°54'$，故下料时角 x 约取 $40°54'$.

习题 1.4

1. 现有一个精密圆锥滚子轴承零件(如图 1－24)，要求测量此轴承之内外滚边的锥角. 用杠杆附件升降 $L=20$mm，测量出 $D=85$mm，$d=55$mm，求出锥度 C 和圆锥角 α(精确到 $1'$).

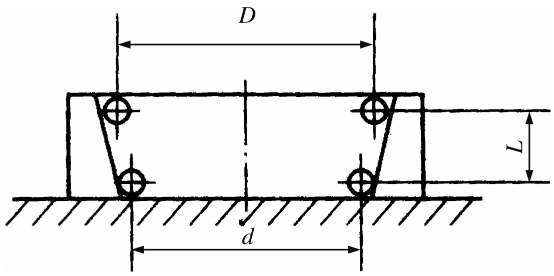


图 1－24

2. 要加工如图 1－25 所示的内燃机阀门推杆头部，已知圆球直径 $D=25$mm，轴的直径 $d=15$mm，求截球长 L.

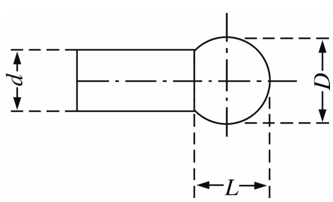


图 1－25