目　　录

第 1 章　绪论

在初等数学中，我们已经学过一些代数方程(如 n 元 n 个一次联立方程)，并且用它们解决了一些有趣的应用问题，使我们初步体会到方程论(主要是设未知量、列方程和求解方程的方法)对于解决实际问题的重要性.

在解析几何与微积分中，我们又碰到一类不同的方程 —— 方程的个数少于未知量的个数，也就是通常所说的函数方程. 例如：

1) $x^2 + y^2 = 1$(设 x 是自变量，则 $y = y(x)$ 是未知函数)；

2) $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 0$(设 z 是自变量，则 $x = x(z)$ 和 $y = y(z)$ 是两个未知函数).

这类函数方程与开头所说的代数方程相比，在概念上深入了一步 —— 确定自变量与因变量之间的函数关系利用这类方程可以解决一类新的问题，例如某些轨迹问题和极值问题等.

本课程所要讲述的方程与刚才说的那种函数方程又不一样，它们除了自变量和未知函数外，还包含了未知函数的导数(即微商). 例如：

1) $x + y + \frac{dy}{dx} = 0$($x$ 是自变量，$y = y(x)$ 是未知函数，$\frac{dy}{dx}$ 是未知函数对 x 的导数)；

2) $r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r\frac{du}{dr} + (r^2 - 1)u = 0$($r$ 是自变量，$u = u(r)$ 是未知函数，$\frac{du}{dr}$ 是未知函数对 r 的导数)；

这种联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数(或微分)的关系式，数学上称之为微分方程. 其中未知函数的导数或微分是不可缺少的. 下面我们通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些物理背景和方程的建立问题，并讲述一些最基本的概念.

§1.1　微分方程的概念

什么是微分方程？它是怎样产生的？这是首先要回答的问题. 300 多年前，由牛顿(Newton，1642－1727) 和莱布尼兹(Leibniz，1646－1716) 所创立的微积分学，是人类科学史上划时代的重大发现，而微积分的产生和发展，又与求解微分方程问题密切相关. 这是因为，微积分产生的一个重要动因来自于人们探求物质世界运动规律的需求. 一般地，运动规律很难全靠实验观测认识清楚，因为人们不太可能观察到运动的全过程. 然而，运动物体(变量) 与它的瞬时变化率(导数) 之间，通常在运动过程中按照某种已知定律存在着联系，我们容易捕捉到这种联系，而这种联系，用数学语言表达出来，其结果往往形成一个微分方程. 一旦求出这个方程的解，其运动规律将一目了然. 下面的例子，将会使你看到微分方程是表达自然规律的一种最为自然的数学语言.

1.1　基本概念

以前已经学过，含有未知量的等式称之为方程，它表达了未知量所必须满足的某些条件. 方程是根据对未知量所进行的运算来分类的，如代数方程、超越方程等. 微分方程与代数方程和超越方程不同，它的未知量是函数，对其所施加的运算涉及求导或微分. 因此对微分方程有如下定义.

(一) 常微分方程和偏微分方程

定义 1.1　一般地，我们把含有未知函数的导数(或微分) 的方程称为微分方程. 如果在微分方程中，自变量的个数只有一个，我们称这种微分方程为常微分方程；自变量的个数为两个或两个以上的微分方程称为偏微分方程.

如方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + cy = f(t), \tag{1.1.1}$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + t\frac{dy}{dt} + y = 0 \tag{1.1.2}$$

就是常微分方程的例子，这里 y 是未知函数，t 是自变量.

方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 T}{\partial t} \tag{1.1.4}$$

就是偏微分方程的例子，这里 T 是未知函数，x、y、z、t 是自变量.

微分方程中出现的未知函数最高阶导数的阶数称为微分方程的阶数. 例如，方程(1.1.1) 是二阶常微分方程，而方程(1.1.3)、(1.1.4) 都是二阶偏微分方程.

一般的 n 阶常微分方程具有形式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0 \tag{1.1.5}$$

这里 $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ 是 $x, y, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的已知函数，而且一定含有 $\frac{d^n y}{dx^n}$，y 是未知函数，x 是自变量.

我们学习的这门课程是常微分方程，今后，我们把常微分方程简称为“微分方程”，有时简称为“方程”.

(二) 线性和非线性

定义 1.2　如果方程(1.1.5) 的左端为 y 及 $\frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^n y}{dx^n}$ 的一次有理整式，则称(1.1.5) 为 n 阶线性微分方程. 例如，方程(1.1.1) 是二阶线性微分方程. 一般的 n 阶线性微分方程具有形式

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \tag{1.1.6}$$

这里 $a_1(x), \cdots, a_n(x), f(x)$ 是 x 的已知函数.

不是线性方程的方程称为非线性方程. 例如，方程 $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$ 是二阶非线性方程，而方程(1.1.2) 是一阶非线性方程.

(三) 解和隐式解

定义 1.3　如果函数 $y = \varphi(x)$ 代入方程(1.1.5) 后，能使它变为恒等式，则称函数 $y = \varphi(x)$ 为方程(1.1.5) 的解. 如果关系式 $\varphi(x, y) = 0$ 决定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是(1.1.5) 的解，我们称 $\varphi(x, y) = 0$ 为方程(1.1.5) 的隐式解. 例如，一阶微分方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 有解 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 和 $y = -\sqrt{1 - x^2}$；而关系式 $x^2 + y^2 = 1$ 就是方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ 的隐式解. 简单起见，以后不把解和隐式解加以区别，统称为程的解.

(四) 通解和特解

定义 1.4　把含有 n 个独立的任意常数 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 称为 n 阶方程(1.1.5) 的通解. 同样，可以定义 n 阶方程(1.1.5) 的隐式通解. 简单起见，以后我们也不把通解和隐式通解加以区别，统称为方程的解. 为了确定微分方程的一个特定的解，我们通常给出这个解所必须满足的条件，这就是所谓的定

解条件. 常见的定解条件是初始条件. 所谓 n 阶微分方程(1.1.5)的初始条件是指如下的 n 个条件：当 $x = x_0$ 时，

$$y = y_0, \frac{dy}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \tag{1.1.7}$$

这里 $x_0, y_0, y_0^{(1)}, \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是给定的 $n+1$ 个常数，初始条件(1.1.7)有时可写为

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy(x_0)}{dx} = y_0^{(1)}, \cdots, \frac{d^{n-1}y(x_0)}{dx^{n-1}} = y_0^{(n-1)} \tag{1.1.8}$$

求微分方程满足定解条件的解，就是所谓定解问题. 当定解条件为初始条件时，相应的定解问题，就称为初值问题.

满足初始条件的解称为微分方程的特解. 初始条件不同，对应的特解也不同. 一般来说，特解可以通过初始条件的限制，从通解中确定任意常数而得到. 例如，在方程 $\frac{du}{dt} = -k(u-u_a)$ 中，含有一个任意常数 C 的解 $u = u_a + Ce^{-kt}$ 就是一阶方程 $\frac{du}{dt} = -k(u-u_a)$ 的通解；而 $u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt}$ 就是满足初始条件当 $t = 0$ 时 $u = u_0$ 的特解.

（五）积分曲线和方向场

定义 1.5　一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.1.9}$$

的解 $y = \varphi(x)$ 表示 xy 平面上的一条曲线，我们称它为微分方程的积分曲线. 而微分方程(1.1.9)的通解 $y = \varphi(x,C)$ 对应于 xy 平面上的一族曲线，我们称这族曲线为积分曲线族，满足初始条件 $y(x_0) = y_0$ 的特解就是通过点 (x_0, y_0) 的一条积分曲线. 此外方程(1.1.9)的积分曲线的每一点 (x,y) 上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 刚好等于函数 $f(x,y)$ 在这点的值，也就是说，积分曲线的每一点 (x,y) 及这点上的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 恒满足方程(1.1.9)；反之，如果在一条曲线每点上其切线斜率刚好等于函数 $f(x,y)$ 在这点的值，则这一条曲线就是方程(1.1.9)的积分曲线.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，在每一点 $(x,y) \in D$ 处画上一个小线段，其斜率等于 $f(x,y)$. 我们把带有这种直线段的区域 D 称为由方程(1.1.9)规定的方向场. 这样，求微分方程(1.1.9)经过点 (x_0, y_0) 的曲线，就是在 D 内求一条经过点 (x_0, y_0) 的曲线，使其上每一点处切线的斜率都与方向场在该点的方向相吻合.

在方向场中，方向相同的点的几何轨迹称为等斜线. 微分方程(1.1.9)的等斜线方程为

$$f(x,y) = k,$$

其中 k 是参数. 给出参数的一系列充分接近的值,就可得足够密集的等斜线族,借此可以近似地作出微分方程(1.1.9) 的积分曲线. 当然,要想更精确地作出积分曲线,还必须进一步弄清楚积分曲线的极值点和拐点等. 显然,极值点和拐点如果存在的话,一般地,它们将满足方程 $f(x,y)=0$ 及 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$.

例 1.1.1　求解方程 $\frac{dy}{dx}=1+xy$.

解　等斜线是双曲线 $1+xy=k$. 特别地当 $k=1$ 时双曲线退化为一对直线 $x=0$ 和 $y=0$,也就是说,在 x 轴和 y 轴上积分曲线有相同的切线方向. 进一步考虑积分曲线的极值点和拐点. 为此,令 $k=0$ 时得 $1+xy=0$,在此双曲线上 $y'=0$,$y''=y+x(1+xy)=y$,可见积分曲线在双曲线的一支(对应于 $y>0$) 上取得极小值,而在其另一支(对应于 $y<0$) 上达到极大. 同样易知积分曲线的拐点位于曲线 $x+(x^2+1)y=0$ 上. 由以上分析,我们即可近似地画出积分曲线的分布概况如图(1.4)

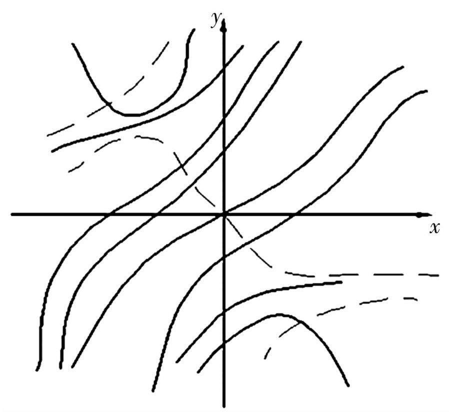

图 1.1

习题　1.1

1.下列方程哪些是微分方程,并指出它的阶数

(1)$y' = 2x + 6$;

(2)$y = 2x + 6$;

(3)$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4x + x$;

(4)$x^2 - 2x = 0$;

(5)$x^2dy + y^2dx = 0$;

(6)$y(y')^2 = 1$;

(7)$y'' + (y')^5 + 2x = 0$;

(8)$y^2 - 8y + 2x = 0$;

(9)$3y^{(4)} + 7y''' + 8y'' - 15y^5 = 2t^3 + t + 2$;

(10)$y''' + 8(y')^4 + 7y^8 = e^{2t}$.

2.验证下列函数是否为相应方程的解?是通解还是特解(C 是任意常数)

(1)$\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0, y = \sin x, y = e^x, y = Ce^{2x}$;

(2)$4y' = 2y - x, y = \dfrac{1}{2}x + 1, y = Ce^{\frac{1}{2}x}, y = Ce^{\frac{1}{2}x} + \dfrac{1}{2}x + 1$;

(3)$y'' - 9y + x + \dfrac{1}{2} = 0, y = 5\cos 3x + \dfrac{x}{9} + \dfrac{1}{18}$;

(4)$x^2y''' = 2y', y = \ln x + x^3$.

3.验证下列函数均为方程$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \omega^2y = 0$的解,其中 $\omega > 0$ 是常数.

(1)$y = \cos\omega x$;

(2)$y = C_1\cos\omega x$(C_1 为任意常数);

(3)$y = \sin\omega x$;

(4)$y = C_2\sin\omega x$(C_2 为任意常数);

(5)$y = C_1\cos\omega x + C_2\sin\omega x$($C_1, C_2$ 为任意常数);

(6)$y = A\sin(\omega x + B)$(A, B 为任意常数);

4.验证 $x = 2(\sin 2t - \sin 3t)$是方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 10\sin 3t$ 满足初始条件 $x(0) = 0$,$x'(0) = -2$ 的解.

5. 一曲线通过点 $(1,0)$，且该曲线上任意点 $M(x,y)$ 处切线斜率为 x^2，求此曲线的方程.

§1.2　一般微分方程应用举例

在这一节中列举几个简单的实际例子，说明怎样从实际问题列成微分方程的问题. 例子虽然简单，但是从中能够简明地诱导出微分方程的一些基本概念，成为进一步探讨其他较复杂问题的借鉴. 掌握好这些例子，会有助于增进我们分析问题的能力.

例 1.1.2　物理冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在时刻 $t=0$ 时，测量得它的温度为 $u_0=150$℃，10 分钟后测得温度为 $u_1=100$℃. 我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t，并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假定空气的温度保持为 $u_a=24$℃.

为了解决上述问题，需要了解有关热力学的一些基本规律. 例如，热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的；在一定的温度范围内(其中包括了上述问题的温度在内)，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在介质温度的差值成比例. 这是已为实验证明了的牛顿(Newton) 冷却定律.

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化速度以 $\frac{du}{dt}$ 来表示. 注意到热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的，因而 $u_0>u_a$，所以温差 $u-u_a$ 恒正；又因物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化速度 $\frac{du}{dt}$ 恒负. 因此由牛顿冷却定律得到：

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a), \tag{1.2.1}$$

这里 $k>0$ 是比例常数. 方程(1.2.1) 就是物体冷却过程的数学模型，它含有未知函数 u 及它的一阶导数 $\frac{du}{dt}$，这样的方程，我们称为一阶微分方程.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.2.1) 中"解出"u. 注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可将(1.2.1) 改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-kdt, \tag{1.2.2}$$

这样，变量 u 和 t 被"分离" 开来了. 两边积分，得到

$$\ln(u-u_a)=-kt+C_1 \tag{1.2.3}$$

这里 C_1 是"任意常数". 根据对数的定义，得到

$$u - u_a = e^{-kt+C_1},$$

由此，令 $e^{C_1} = C$，即得

$$u = u_a + Ce^{-kt} \tag{1.2.4}$$

根据“初始条件”：

$$当\ t = 0\ 时，u = u_0, \tag{1.2.5}$$

容易确定“任意常数”C 的数值，故把 $t = 0$ 和 $u = u_0$ 代入(1.2.4)，得到：

$$C = u_0 - u_a,$$

于是：

$$u = u_a + (u_0 - u_a)e^{-kt}, \tag{1.2.6}$$

这时如果 k 的数值确定了，方程(1.2.6)就完全决定了温度 u 和时间 t 的关系.

根据条件 $t = 10$ 时，$u = u_1$，得到

$$u_1 = u_a + (u_0 - u_a)e^{-10k}.$$

因此，有

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{u_0 - u_a}{u_1 - u_a},$$

用给定的 $u_0 = 150$，$u_1 = 100$ 和 $u_a = 24$ 代入，得到

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{126}{76} \approx 0.051,$$

从而

$$u = 24 + 126e^{-0.051t} \tag{1.2.7}$$

这样根据方程(1.2.7)，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值了. 例如 20 分钟后物体的温度就是 $u_2 \approx 70$℃. 由方程(1.2.7)可知，当 $t \to \infty$ 时，$u \to 24$℃，这可以解释

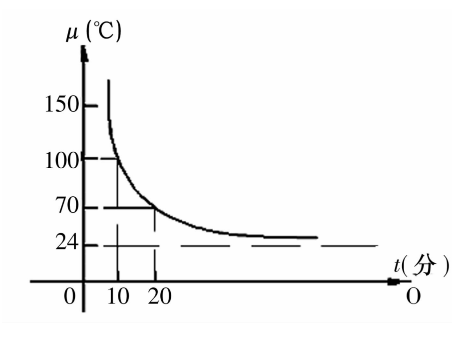

图 1.2

为，经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 24.3℃，与空气的温度已相当的接近. 而经过 3 小时后，物体的温度为 24.01℃，我们的一些测量仪器已测不出它与空气的温度的差别了. 在实用上，人们认为这时物体的冷却过程已基本结束. 所以，经过一段时间后(如 3 小时后)，可以认为

物体的温度和空气的温度并没有任何差别了.

微分方程的"解"可以用图形表示出来,这往往给我们一个简明直观的了解.图(1.2)就是"解"(1.2.7)的图形.

从例 1.2 中可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤:

(1) 建立起实际问题的数学模型,也就是建立反映这个实际问题的微分方程并提出相应的定解条件;

(2) 求解这个微分方程,或者对方程解的性态进行分析;

(3) 用所学的数学结果解释实际问题,从而预测到某些物理过程的特定性质,以便达到能动地改造世界,解决实际问题的目的.

建立起实际问题的数学模型一般比较困难的,因为这需要对与问题有关的自然规律有一个清晰的了解(例如,例 1.2 中就要了解热力学中的牛顿冷却定律),同时也需要有一定的数学知识.微分方程往往可以看作是各种不同物理现象的数学模型.我们在建立微分方程的时候,只能考虑影响这个物理现象的一些主要因素,而把其他的一些次要因素忽略掉,如果的确考虑到了那些最主要的因素,那么我们所得到的微分方程,它的解和所考虑的物理现象比较接近的.这时,我们得到的数学模型是有用;否则,我们还应该考虑其他的一些因素,以便建立起更为有效、更为合理的数学模型.

下面再举几个例子说明如何建立微分方程的问题,至于如何求解这些微分方程,则留待以后再讨论.

例 1.1.3　镭、铀等放射性元素因不断地放出各种射线而逐渐减少其质量(称为衰变).根据实验知道衰变速度与剩余物的质量成正比,问这种元素的质量 x 是时间 t 的什么样的函数?

解　由题意可知有

$$\frac{dx}{dt}=-kx \tag{1.2.8}$$

这里 $\frac{dx}{dt}$ 表示衰变的速度,即 x 关于 t 的变化率.$k>0$ 是比例常数,因元素的不同而异.

等式右边的负号表示当 $x>0$ 时,$\frac{dx}{dt}<0$,即当 t 增加时镭的质量总是减少的.

例 1.1.4　$R-L$ 电路

如图(1.3)的 $R-L$ 电路,它包含电感 L,电阻 R 和电源 E.设 $t=0$ 时,电路中没有电流.我们要求建立:当开关 K 合上后,电流 I 应该满足的微分方程.这里假设 R、L、E 都是常数.

解　为了建立电路的微分方程,我们引用关于电路的基尔霍夫第二定律:在闭合回

路中,所有支路上的电压的代数和等于零.

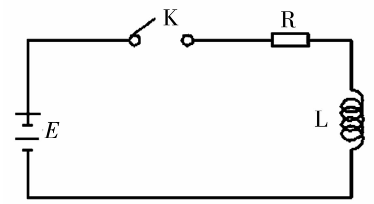

图 1.3

注意到经过电阻 R 的电压降是 RI,而经过电感 L 的电压降是 $L\dfrac{dI}{dt}$,由基尔霍夫第二定律得到

$$E - L\frac{dI}{dt} - RI = 0,$$

即

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \tag{1.2.9}$$

求出的 $I = I(t)$ 应满足条件:

当 $t = 0$ 时,$I = 0$.

如果假定在 $t = t_0$ 时,$I = I_0$,电源 E 突然短路,因而 E 变为零,此后亦保持为零.那么电流 I 满足方程

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0,$$

及条件

当 $t = t_0$ 时,$I = I_0$.

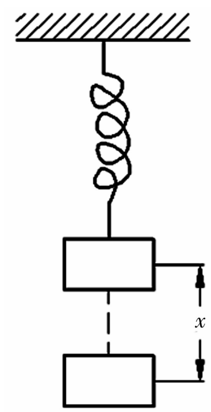

图 1.4

例 1.1.4 研究悬挂重物的弹簧的振动.假设弹簧的质量与重物的质量相比是很小,以致可以略去不计,试建立其微分方程.图(1.4)

解 如图(1.4),当重物(质量为 m)静止不动时,它所受到的两个力,即重力 mg 和弹簧的恢复力,互相平衡.如果把它向下拉(或向上推)一小段距离 x,然后放手,根据常识,知道重物将作上下振动若干次,振幅愈来愈小,最后仍归于静止.今取 x 轴的正方向竖直向下,取重物静止不动时其重心的位置为 $x = 0$.在振动过程中,重物受到三个力的作用:

1.重力 mg,方向向下.

2.弹簧的恢复力 $mg + cx$,其中 $c > 0$ 是弹簧的刚度,即把它拉长一个单位长度所需的力.这个力的方向要看 $mg + cx > 0$ 还是 < 0 而定.在前一情况中,弹簧的长度比没有悬挂重物时要长,因此恢复力方向向上;在后一情况则相反,恢复力向下.

3. 空气阻力. 根据实验知道空气阻力的大小与重物运动的速度成正比，而方向与运动方向相反. 这样，应用牛顿第二定律，就得到：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=mg-(mg+cx)-a\frac{dx}{dt}=-cx-a\frac{dx}{dt}\tag{1.2.10}$$

其中 $a>0$ 称为阻尼系数，等式中间第二、三两项前面的负号已经在上面解释过.

从以上所举的几个例子中不难发现，完全无关、本质上不同的物理现象有时可以由同类型的微分方程来描述. 例如，反映物体冷却过程的方程

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_0)\tag{1.2.11}$$

和反映电路 $R-L$ 中电流变化规律的方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$$

都可以写成

$$\frac{dy}{dt}+k^2y=B\tag{1.2.12}$$

不同的物理现象可以具有相同的数学模型这一事实，正是现代许多应用数学工作者和工程人员应用模拟方法解决物理或工程问题的理论依据. 例如，利用电路来模拟某些力学系统或机械系统等等在现今已相当普遍.

以上只是举出了常微分方程的一些物理背景，其实在自然科学和技术科学的其他领域中，如化学、生物学、自动控制、电子技术等，都提出了大量的微分方程问题. 同样，在社会科学的一些领域里也存在着微分方程问题. 因而社会的生产实践是常微分方程理论取之不尽的基本源泉. 此外，常微分方程与数学的其他分支的关系也是非常密切的，它们往往互相联系、互相促进. 例如，几何学就是常微分方程理论的丰富的源泉之一和有力工具. 考虑到常微分方程是一门与实际联系比较密切的数学课程，我们自然应该注意它的实际背景与应用；而作为一门数学基础课程，我们又应该把重点放在应用数学方法研究微分方程本身的问题上. 因此，读者不应该忽视本课程中所举出的实际例子及有关的习题，应从中注意培养解决实际问题的初步能力. 但是，按照课程的要求，我们要把主要的注意力集中到弄清常微分方程的一些基本理论和掌握各种类型方程的求解方法这两方面上，这是本课程的重点，也是我们解决实际问题的必要工具.

习题　1.2

1. 摩托艇以 5m/s 速度在静水上运动，全速时停止了发动机，过了 20s 后，艇的速度

减至 $v_1 = 3\text{m/s}$.确定发动机停止 2min 后艇的速度.v 为子弹的速度,假定水的阻力与艇的运动速度成正比.

2.一质量为 m 的质点作直线运动,从速度等于零的时刻起,有一个和时间成正比(比例系数为 k_1)的力作用在它上面.此外质点又受到介质的阻力,这阻力和速度成正比(比例系数为 k_2).试求此质点的速度与时间的关系.

第 2 章　一阶微分方程的初等解法

微分方程的一个中心问题是“求解”. 但是，微分方程的求解问题通常并不是容易解决的. 本章将介绍一阶方程的初等解法，即把微分方程的求解问题化为积分问题. 一般的一阶方程是没有初等解法的，本章的任务就在于介绍若干能有初等解法的方程类型及其求解的一般方法，虽然这些类型是很有限的，但它们却反映了实际问题中出现的微分方程的相当部分.

§2.1　变量分离方程与变量变换

2.1.1　变量分离方程

定义 2.1　形如

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{2.1.1}$$

的方程称为变量分离方程. 它的特点是右端为自变量 x 的函数与因变量 y 的函数的乘积，其中 $f(x)$，$g(y)$ 分别是 x，y 的连续函数. 例如，$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$；$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{y}$；$\frac{dy}{dx}=e^{xy}$；$\frac{dy}{dx}=y\cos x$ 都是变量分离的方程，而莱布尼兹方程 $\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 则不是.

现在说明方程(2.1.1)的求解方法.

为了解这个方程，需要考察两种情况.

(1) 若 $g(y)=0$ 有某些实根 $y=a$，那么把函数 $y=a$ 代入方程(2.1.1)就可以直接验证 $y=a$ 是否为方程的解.

(2) 如果 $g(y)\neq 0$，我们可将(2.1.1)改写成

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,$$

这样变量就分离出来. 两边积分，得到 y 所满足的隐函数方程

$$\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+C \tag{2.1.2}$$

这里我们把积分常数 C 明确写出来，而把 $\int \frac{dy}{g(y)}$，$\int f(x)dx$ 分别理解为 $\frac{1}{g(y)}$，$f(x)$ 的某一个原函数. 如无特别声明，以后也作这样的理解.

于是，对于任一常数 C，微分(2.1.2)的两边，就知(2.1.2)所确定的隐函数 $y=y(x,C)$ 满足方程(2.1.1). 因而，(2.1.2)是(2.1.1)的通解.

如果存在 y_0，使 $g(y_0)=0$，直接代入，可知 $y=y_0$ 也是(2.1.1)的解. 可能它不包含在方程的通解(2.1.2)中，必须予以补上.

例 2.1.1 求解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y^2}$.

解 将变量分离，得到

$$y^2dy=x^2dx,$$

两边积分，即得

$$\frac{y^3}{3}=\frac{x^3}{3}+\frac{C}{3}.$$

因而，通解为

$$y^3=x^3+C(\text{其中 } C \text{ 是任意常数}).$$

或者，解出 y，写出显函数形式的解 $y=\sqrt[3]{x^3+C}$.

例 2.1.2 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 这是一个可分离变量的方程，分离变量后得

$$\frac{dy}{y}=2xdx(y\neq 0).$$

两端分别积分，

$$\int \frac{1}{y}dy=\int 2xdx,$$

得

$$\ln|y|=x^2+C_1,\quad \text{即 } y=\pm e^{x^2}e^{C_1}.$$

取 $\pm e^{C_1}=C$，得 $y=Ce^{x^2}$(C 为任意常数)，这就是该方程的通解.

为方便起见，我们以后可将 $\ln|y|$ 写成 $\ln y$，将常数 C_1 写成 $\ln C$ 等形式，这样可由 $\ln y=x^2+\ln C$ 解得 $y=Ce^{x^2}$，因此可使求解过程简便，但要记住，最后得到的常数 C 仍是任意常数(可正可负)，以后遇到类似的情况均照此办法处理.

例 2.1.3 求微分方程 $\cos x\sin ydx-\sin x\cos ydy=0$ 满足初始条件 $y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{2}$ 的特解.

解　分离变量,得$\frac{\cos y}{\sin y}dy = \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$($\sin x\sin y \neq 0$).

两端积分,得

$$\ln\sin y = \ln\sin x + \ln C.$$

从而所求方程的通解为

$$\sin y = C\sin x.$$

由初始条件 $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$,得 $C = 2$,故所求方程的特解为

$$\sin y = 2\sin x.$$

例 2.1.4　求方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y \quad (2.1.3)$$

的通解,其中 $p(x)$是 x 的连续函数.

解　将变量分离,得到

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx.$$

两边积分,得

$$\int \frac{1}{y}dy = \int p(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\ln|y| = \int p(x)dx + C_1 \text{(其中 } C_1 \text{ 是任意常数)}.$$

由对数定义,即有

$$|y| = e^{\int p(x)dx + C_1},$$

即

$$y = \pm e^{C_1} \cdot e^{\int p(x)dx},$$

令 $\pm e^{C_1} = C$,得到通解

$$y = Ce^{\int p(x)dx}, \tag{2.1.4}$$

此外,显然 $y = 0$ 也是方程的解.如果在(2.1.4)中允许 $C = 0$,则 $y = 0$ 也就包括在(2.1.4)中.因而,微分方程(2.1.3)的通解为(2.1.4),其中 C 为任意常数.

2.1.2　可化为变量分离方程的类型

对于变量分离方程,我们可以用初等积分法求解,人们自然会想到,对于一个方程,如果能通过适当的变换,使之成为变量分离方程,则原方程也就可解了.

这里只介绍两种简单的情形.

（一）齐次型微分方程

定义 2.2　形如

$$\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2.1.5}$$

的方程，称为齐次型微分方程，这里 $g(u)$ 是 u 的连续函数.

现在引进新的未知函数

$$u=\frac{y}{x}(2.1.6),$$

则 $y=ux$，于是

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u, \tag{2.1.7}$$

将(2.1.6)、(2.1.7)代入(2.1.5)，则原方程变为 $x\frac{du}{dx}+u=g(u)$. 整理后，得到

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}. \tag{2.1.8}$$

方程(2.1.8)是一个变量分离方程. 可改写为

$$\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x},$$

再积分，得到

$$\int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|x|+C.$$

在算出等式左边的积分后，仍以 $\frac{y}{x}$ 代替其中的 u，即得方程(2.1.5)的通积分. 但如果 $g(u)-u=0$ 有实根，$u_1,u_2,\cdots,u_k$. 那么 $y=u_ix(i=1,2,\cdots,k)$ 都是丢掉的特解，应该补上.

例 2.1.5　解方程 $\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$.

解　这是一个齐次方程，令 $\frac{y}{x}=u$，则原方程可化为

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}, \tag{2.1.9}$$

我们将其变量分离，得到

$$\frac{du}{2\sqrt{u}}=\frac{dx}{x},$$

两边积分，得到

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C,$$

即

$$u=(\ln|x|+C)^2.$$

代回原变量，则得到原方程的通解为

$$y=(\ln|x|+C)^2x.$$

注意到方程(2.1.9)在变量分离时，漏掉解 $u=0$，故而原方程还有解

$$y=0.$$

例 2.1.6　求解方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\cot\frac{y}{x}$.

解　这是齐次方程，令$\frac{y}{x}=u$，则原方程可化为

$$x\frac{du}{dx}+u=u+\cot u,$$

即

$$\frac{du}{dx}=\frac{\cot x}{x},\tag{2.1.10}$$

将上式分离变量，得到

$$\tan u du=\frac{dx}{x},$$

两边积分，得到

$$-\ln|\cos u|=\ln|x|+C_1,\text{（这里是 }C_1\text{ 任意常数）}$$

整理后，得到

$$\cos u=\pm\frac{e^{C_1}}{x}.$$

令 $\pm e^{C_1}=C$，得

$$\cos u=\frac{C}{x}\tag{2.1.11}$$

此外，方程(2.1.10)还有解 $\cot u=0$，即 $\cos u=0$.

如果在(2.11)中允许 $C=0$，则 $\cos u=0$ 也就包括在(2.11)中，这就是说，方程(2.1.10)的通解为(2.1.11). 代回原来的变量，得到原方程的通解为

$$\cos\frac{y}{x}=\frac{C}{x}\text{（这里是 }C\text{ 任意常数）}.$$

例 2.1.7　求解方程 $xydx-(x^2+y^2)dy=0$.

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

可见它是齐次方程. 令$\frac{y}{x}=u$,则

$$\frac{dy}{dx}=x\frac{du}{dx}+u,$$

原方程可化为

$$x\frac{du}{dx}=-\frac{u^3}{1+u^2},$$

将上式分离变量,得到

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1+u^2}{u^3}du,$$

两边积分,得

$$\ln x+\ln C=\frac{1}{2u^2}-\ln u,$$

即

$$ux=Ce^{\frac{1}{2u^2}}.$$

代回原变量,则得到原方程的通解为

$$y=Ce^{\frac{x^2}{2y^2}}.$$

(二)可化为齐次型方程的方程

形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2} \tag{2.1.12}$$

的方程也可经变量变换化为变量分离方程. 这里 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 均为常数. 我们分三种情形来讨论:

1)$c_1=c_2=0$ 的情形.

这时方程(2.1.12)属齐次方程. 事实上,我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=\frac{a_1+b_1\dfrac{y}{x}}{a_2+b_2\dfrac{y}{x}}=g\left(\frac{y}{x}\right).$$

因此,只要作变换$\frac{y}{x}=u$,则方程就化为变量分离方程

$$x\frac{du}{dx}=\frac{a_1+b_1u}{a_2x+b_2u}-u.$$

2)c_1,c_2 不全为零时,如果$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$,即$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$ 的情形.

此时可令 $a_2x+b_2y=u$,则 $a_1x+b_1y=ku$,于是方程(2.1.12)可化为

$$\frac{du}{dx}=b_2\frac{ku+c_1}{u+c_2}+a_2,$$

或

$$\frac{du}{dy}=a_2\frac{u+c_2}{ku+c_1}+b_2.$$

它们都是变量分离方程,从而可解.

3)c_1,c_2 不全为零时,且$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$的情形.

此时方程(2.1.12)右端的分子、分母都是 x,y 的一次式,因此

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}\tag{2.1.13}$$

代表 xy 平面上两条相交直线,设交点为(α,β).显然 $\alpha\neq 0$ 或 $\beta\neq 0$,否则 $\alpha=\beta=0$,即交点为坐标原点,那么必有 $c_1=c_2=0$,这正是情形1).从几何上知道要将所考虑的情形化为情形1),只需进行坐标平移,将坐标原点$(0,0)$移至(α,β)就行了.事实上,若令$\begin{cases}X=x-\alpha,\\ Y=y-\beta,\end{cases}$则(2.13)化为

$$\begin{cases}a_1X+b_1Y=0,\\ a_2X+b_2Y=0.\end{cases}$$

从而(2.1.12)变为$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$.

因此,我们得到这种情形求解的一般步骤如下:

① 解线性方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$,设其解为 $x=\alpha,y=\beta$;

② 作变换$\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$,将方程化为齐次方程$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$;

③ 再经变换$\dfrac{Y}{X}=u$,将方程$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}=g\left(\dfrac{Y}{X}\right)$化为变量分离方程

$$X\frac{du}{dX}=\frac{a_1+b_1u}{a_2x+b_2u}-u;$$

④ 求解上述变量分离方程,最后代回原变量,得到方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}$的解.

我们指出,上述解题的方法和步骤也适用于比方程(2.1.12)更一般的方程类型,如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).$$

此外,诸如$\frac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$,$yf(xy)dx+xg(xy)dy=0$,$\frac{dy}{dx}=xf\left(\frac{y}{x^2}\right)$,$x^2\frac{dy}{dx}=f(xy)$,以及$M(x,y)(xdx+ydy)+N(x,y)(xdy-ydx)=0$(其中$M,N$为$x,y$的齐次函数,次数可以不相同)等一些方程类型,均可通过适当的变量变换化为变量分离方程.

现在我们依上述步骤来解几个方程.

例 2.1.8　解方程$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$.

解　解方程组

$$\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$$

得$x=1,y=2$.
令

$$\begin{cases}X=x-1\\Y=y-2\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x=X+1\\y=Y+2\end{cases}$$

代入原方程,则有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y}.$$

这是一个齐次方程.令$\frac{Y}{X}=u$,则

$$\frac{dY}{dX}=u+X\frac{du}{dX},$$

于是

$$u+X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u},$$

即

$$X\frac{du}{dX}=\frac{-u^2-2u+1}{1+u}.$$

分离变量,得

$$\frac{(1+u)du}{1-2u-u^2}=\frac{dX}{X},$$

两边积分,得

$$\ln|X|+C=-\frac{1}{2}\ln|u^2+2u-1|,$$

因此

$$X^2(u^2+2u-1)=C.$$

以 $u=\dfrac{Y}{X}$ 代入，得

$$Y^2+2XY-X^2=C.$$

再以 $X=x-1$，$Y=y-2$ 代入，整理得

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=C.（其中 C 为任意常数）$$

即原方程的通解.

注意到在变量分离时，还有解 $u=(-1\pm\sqrt{2})X$，即 $Y=(-1\pm\sqrt{2})X^2$，即

$$y=(-1\pm\sqrt{2})(x-1)^2+2.$$

也是方程的解.

例 2.1.9　解方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+4y-1}{x+2y+1}$.

解　此时$\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$，因而令 $u=x+2y$，于是原方程为

$$\frac{du}{dx}=2\,\frac{2u-1}{u+1}+1,$$

即

$$\frac{du}{dx}=\frac{5u-1}{u+1},$$

分离变量，得

$$\frac{(1+u)du}{5u-1}=dx.$$

两边积分，得

$$\frac{1}{5}u+\frac{6}{25}\ln|5u-1|=x+C,$$

即

$$5u+6\ln|5u-1|=25x+C,$$

亦即

$$(5u-1)^6=Ce^{10(2x-y)}.（其中 C 为任意常数）$$

即原方程的通解.

注意到在变量分离时，还有解 $u=\dfrac{1}{5}$，即 $x+2y=\dfrac{1}{5}$ 也是原方程的解.

一般地，对形如(2.1.12)的方程求解步骤如下：

第一步，看清方程(2.1.12)属于如下三种情形中的哪一种，

(1)$c_1 = c_2 = 0$；

(2)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$；

(3)$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$，$c_1$，$c_2$ 不全为零.

第二步，对第一种情形，本身就是齐次方程，按上节齐次方程解题步骤去做；对第二种情形，作变换 $a_2x+b_2y=u$，则方程(2.1.12)为变量分离方程，于是可按变量分离方程步骤去做；对于第三种情形，按问题 2 中示出的步骤去解.

2.1.3 应用举例

例 2.1.10 电容器的充电和放电

如图(2.1)所示的 $R-C$ 电路，开始时电容 C 上没有电荷，电容两端的电压为零. 我们把开关 K 合上“1”后，电池 E 就对电容 C 充电，电容 C 两端的电压 U_C 逐渐升高. 经过相当时间后，电容充电完毕，我们再把开关 K 合上“2”，这时电容 C 就开始放电过程. 现在要求找出充、放电过程中，电容 C 两端的电压 U_C 随时间 t 的变化规律.

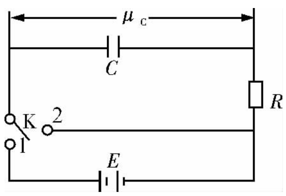

图 2.1

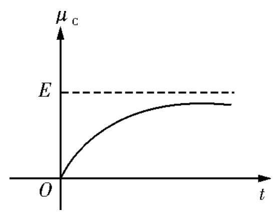

图 2.2

解 对于充电过程，由闭合回路的基尔霍夫第二定律，有

$$U_C + RL = E \tag{2.1.14}$$

对电容 C 充电时，电容上的电量 Q 逐渐增多，根据 $Q = CU_C$ 得到

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CU_C) = C\frac{dU_C}{dt} \tag{2.1.15}$$

将(2.1.5)代入(2.1.4)，得到满足 U_C 的微分方程

$$RC\frac{dU_C}{dt} + U_C = E \tag{2.1.16}$$

这里 R、C、E 都是常数. 方程(2.1.16)属于变量分离方程.

将(2.1.16)分离变量，得到

$$\frac{dU_C}{U_C - E} = -\frac{dt}{RC},$$

两边积分，得

$$\ln|U_C - E| = -\frac{1}{RC}t + C_1,$$

即

$$U_C - E = \pm e^{C_1} e^{-\frac{1}{RC}t} = C_2 e^{-\frac{1}{RC}t}(\text{这里 } C_2 = \pm e^{C_1} \text{ 为任意常数}).$$

将初始条件：$t = 0$ 时 $U_C = 0$ 代入，得到 $C_2 = -E$

所以

$$U_C = E(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \tag{2.1.17}$$

这就是 $R-C$ 电路充电过程中电容 C 两端的电压的变化规律. 由(2.1.17) 知道，电压 U_C 从零开始逐渐增大，且当 $t \to +\infty$ 时，$U_C \to E$，见图(2.2). 在电工学中，通常称 $\tau = RC$ 为时间常数，当 $t = 3\tau$ 时，$U_C = 0.95E$，就是说，经过 3τ 的时间后，电容 C 上的电压已达到外加电压的 95%。实用上，通常认为这时电容 C 的充电过程已基本结束. 易见充电结果 $U_C = E$. 对于放电过程的讨论，可以类似地进行.

例 2.1.11　若有两种化学药品 A 及 B 互相作用而成化合物 C，若已知每一个分子是由 m 个 A 分子及 n 个 B 分子所组成，而 A 和 B 各原有 a 及 b 个分子，今若化合成 C 之速率是与 A 及 B 尚未起变化的量之乘积成正比，试求在时刻 t 时 C 的分子量 x.

解　假定在时刻时为 t 时，C 的分子量为 x，则在这个时刻已经用掉了 mx 个 A 分子及 nx 个 B 分子，故此时 A 及 B 尚未起变化者各有 $(a - mx)$ 个及 $(b - nx)$ 个.

于是，由题意得方程

$$\frac{dx}{dt} = k(a - mx)(b - nx), \text{其中 } k \text{ 为正的常数.}$$

由此分离变量得

$$\frac{dx}{(a - mx)(b - nx)} = kdt,$$

两边积分，得

$$\int \frac{dx}{(a - mx)(b - nx)} = kt + C,$$

为了计算左端这个积分，先假定 $\frac{a}{b} \neq \frac{m}{n}$，即 $bm - an \neq 0$.

此时

$$\int \frac{dx}{(a - mx)(b - nx)} = \frac{1}{bm - an} \ln \frac{b - nx}{a - mx}.$$

所以

$$\frac{1}{bm-an}\ln\frac{b-nx}{a-mx}=kt+C.$$

因为当 $t=0$ 时,$x=0$. 故

$$C=\frac{1}{bm-an}\ln\frac{b}{a},$$

代入上式得

$$\frac{1}{bm-an}\ln\frac{ab-anx}{ab-bmx}=kt.$$

去分母,并化去对数,即可解出 x 为

$$x=\frac{ab[e^{(bm-an)kt}-1]}{bme^{(bm-an)kt}-an}.$$

若 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$,即 $bm-an=0$,则因 $b=\frac{n}{m}a$,

故

$$b-nx=\frac{n}{m}a-nx=\frac{n}{m}(a-mx).$$

所以,

$$\int\frac{dx}{(a-mx)(b-nx)}=\frac{m}{n}\int\frac{dx}{(a-mx)^2}=\frac{1}{n(a-mx)}.$$

于是,由

$$\frac{1}{n(a-mx)}=kt+\frac{1}{na}$$

解出

$$x=\frac{kna^2t}{m(1+knat)}=\frac{knabt}{1+knat}.$$

习题　2.1

1. 解下列方程:

(1) $\frac{dy}{dx}=e^y\sin x$;　　(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{\cos^3 y}$;

(3) $xy'-y\ln y=0$;　　(4) $(e^{x-y}-e^x)dx+(e^{x+y}+e^y)dy=0$;

(5) $\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0$;

(6) $(y-x)dx+(x+y)dy=0$;

(7) $x\frac{dy}{dx}=y+\sqrt{y^2-x^2}$;　　(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$;

(9) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y}{x+y}$;　　(10) $(x-2y-5)dx+(2x-y+4)dy=0$;

(11) $(-x+y-5)dx+(x-y-2)dy=0$;

(12) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

2. 求下列方程的通解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{xy^2+x}{x^2y-y}$;

(2) $y\ln x dx+x\ln y dy=0$;

3. 解下列初值问题：

(1) $\begin{cases}\sec^2 x\tan y dx+\sec^2 y\tan x dy=0,\\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x,\\ y(0)=1.\end{cases}$

4. 求下列方程的特解：

(1) $(x-y)dx+(3x+y)dy=0, y(2)=-1$;

(2) $(y^2+5xy+5x^2)dx+x^2dy=0, y(1)=1$;

(3) $y(9x-2y)dx-x(6x-y)dy=0, y(1)=1$;

(4) $(y-\sqrt{x^2+y^2})dx-dy=0, y(\sqrt{3})=1$;

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y-2}{-x+y-4}, y(0)=0$;

(6) $(x+y)dx+(x+y-1)dy=0, y(1)=1$;

§2.2　一阶线性微分方程与常数变易法

前面所讨论的几种类型的一阶微分方程，都是通过初等积分法求解，而且都依赖于化为变量分离方程，所以实质上都是采用分离变量法来解方程的. 虽然分离变量法是一种基本而又重要的初等解法，但许多方程并不能用这种方法来解，本节将介绍另一种重要的初等解法，即所谓常数变易法. 这种方法对于线性微分方程的求解是完全适用的.

定义 2.3　一阶线性微分方程

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0,$$

在 $a(x)\neq 0$ 的区间上可以写成

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x). \tag{2.2.1}$$

今后我们主要讨论形如(2.2.1)的方程，对于 $a(x)$ 有零点的情形分别在 $a(x)\neq 0$ 的相应区间上讨论. 这里假设 $P(x)$，$Q(x)$ 在考虑的区间上是 x 的连续函数.

若 $Q(x)\equiv 0$，(2.2.1)变为

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y. \tag{2.2.2}$$

我们把方程(2.2.2)称为一阶齐线性方程.

若 $Q(x)\neq 0$，则方程(2.2.1)称为一阶非齐线性方程.

(2.2.2)是变量分离方程. 我们在§2.1的例2.14中求得它的通解为

$y=Ce^{\int p(x)dx}$　　(2.2.3)，这里 C 是任意常数.

现在讨论非齐线性方程(2.2.1)的通解的求法. (2.2.1)不能用分离变量法求解，因此得想其他办法. 不难看出，(2.2.2)是(2.2.1)的特殊情形，两者既有联系又有差别，因此可以设想它们的解也应该有一定的联系而又有一定的差别. 下面试图利用方程(2.2.2)的通解(2.2.3)的形式去求出方程(2.2.1)的通解. 显然，如果(2.2.3)中 C 恒保持为常数，它必不可能是(2.2.1)的解，我们设想：在(2.2.3)中，将常数 C 变易为 x 的待定函数 $C(x)$，使它满足方程(2.2.1)，从而求出 $C(x)$.

为此，令

$$y=C(x)e^{\int p(x)dx}, \tag{2.2.4}$$

微分之，得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{\int P(x)dx}, \tag{2.2.5}$$

以(2.2.4)、(2.2.5)代入(2.2.1)，得到

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+C(x)P(x)e^{\int P(x)dx}=P(x)C(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x)$$

即

$$\frac{dC(x)}{dx}=Q(x)e^{-\int P(x)dx},$$

积分后得到

$C(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}+C_1$(2.2.6)，这里 C_1 是任意常数，

将(2.2.6)代入(2.2.4)，得到

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C_1\right). \tag{2.2.7}$$

这就是方程(2.2.1)的通解.

这种将常数变易为待定函数的方法,我们通常称为常数变易法.我们看到,常数变易法实际上是一种变量变换的方法,通过变换(2.2.4)可将方程(2.2.1)化为变量分离方程.它不但适用于一阶线性方程,而且也适用于高阶线性方程和线性方程组.

例 2.2.1　求方程 $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$ 的通解.(这里 n 为常数).

解　将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=e^x(x+1)^n. \tag{2.2.8}$$

首先,求齐次线性方程

$$\frac{dy}{dx}-\frac{n}{x+1}y=0,$$

的通解,从

$$\frac{dy}{y}=\frac{n}{x+1}dx,$$

得到齐次线性方程的通解为

$$y=C(x+1)^n.$$

其次,应用常数变易法求非齐次线性方程的通解.为此,在上式中把 C 看成 x 的待定函数 $C(x)$.即得

$$y=C(x)(x+1)^n, \tag{2.2.9}$$

微分之,得到

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}(x+1)^n+n(x+1)^{n-1}C(x). \tag{2.2.10}$$

以(2.2.9)及(2.2.10)代入(2.2.8),得到

$$\frac{dC(x)}{dx}=e^x,$$

积分之,求得

$$C(x)=e^x+C.$$

把求得 $C(x)$ 的代入(2.2.9),即得原方程的通解为

$$y=(x+1)^n(e^x+C).$$

这里 C 是任意常数.

例 2.2.2　求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通解.

解　本题不是线性方程,但不难经过代换化为线性方程.以 y^2 乘以等式两边,再令 $u=y^3$ 便得:

$$\frac{du}{dx}=\frac{3u}{x}+3x^3,$$

因此，$P(x)=\frac{3}{x}$，$Q(x)=3x^3$，由公式(2.2.7)，得：

$$u=y^3=e^{\int\frac{3}{x}dx}(3x^3e^{\int-\frac{3}{x}dx}+C)=x^3\left[\int 3dx+C\right]=3x^4+Cx^3.$$

这里 C 为任意常数.

还有一类方程亦可经过类似的变量代换化为线性方程的是所谓伯努里(Bernoulli)方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n, \tag{2.2.11}$$

这里 $P(x)$，$Q(x)$ 为 x 的连续函数，$n\neq 0,1$ 是常数，利用变量变换可将伯努利方程化为线性方程.事实上，对于，$y\neq 0$，用 y^{-n} 乘(2.2.11)两边，得到

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=y^{1-n}P(x)+Q(x), \tag{2.2.12}$$

引入变量变换

$$z=y^{1-n}, \tag{2.2.13}$$

从而

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \tag{2.2.14}$$

将(2.2.13)、(2.2.14)代入(2.2.12)，

得到

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x). \tag{2.2.15}$$

这是线性方程，可按上面介绍的方法求得它的通解，然后代回原来的变量，便得到(2.2.11)的通解.此外，当 $n>0$ 时，方程还有解 $y=0$.

例 2.2.3 求方程$\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解.

解 这是 $n=2$ 时的伯努利方程.令 $z=y^{-1}$，

算得

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx},$$

代入原方程得到

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x,$$

这是线性方程，求得它的通解为

$$z = \frac{C}{x^6} + \frac{x^2}{8},$$

代回原来的变量 y，得到

$$\frac{1}{y} = \frac{C}{x^6} + \frac{x^2}{8},$$

或者

$$\frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} = C.$$

这里 C 为任意常数.

这就是原方程的通解. 此时，方程还有解 $y = 0$.

例 2.2.4　求方程$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^3y^3 + xy}$ 的通解.

解　原方程不是未知函数 y 的线性方程，但我们可将它改写为

$$\frac{dx}{dy} = yx + y^3x^3.$$

它是伯努利方程，故可用代换 $z = \frac{1}{x^2}$，把它化为线性方程：

$$\frac{dz}{dy} + 2yz = -2y^3,$$

则它的通解是

$$z = 1 - y^2 + Ce^{-y^2},$$

从而原方程的通积分是

$$\frac{1}{x^2} = 1 - y^2 + Ce^{-y^2}.$$

这里 C 为任意常数.

习题　2.2

1. 求下列方程的解：

(1) $\frac{dy}{dx} = y + \cos x$；

(2) $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\sin 2t + s\cos t$；

(3) $\frac{dy}{dx} + \frac{1-2x}{x^2}y - 1 = 0$，

2.求下列方程的通解：

(1) $\frac{dy}{dx}=2xy+e^{x^2}\cos x$；

(2) $x\frac{dy}{dx}=y+\frac{x}{\ln x}$；

(3) $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+2xy-\cos x=0$；

(4) $(1+x^2)\frac{dy}{dx}-2xy=(1+x^2)^2$；

(5) $ydx-(x+y^3)dy=0$；

(6) $x\frac{dy}{dx}-4y=x^2\sqrt{y}$.

3.解下列初值问题：

(1) $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x},y(0)=5$；

(2) $x\frac{dy}{dx}+y=e^{-2x},y\left(\frac{1}{2}\right)=2e$；

(3) $\frac{dy}{dx}=y\tan x+\sec^3 x,y(0)=0$；

(4) $\frac{dy}{dx}=x^3-2xy,y(1)=1$.

4.设有一通过坐标原点的曲线，其上任意一点的切线斜率等于$\frac{2x(y+1+x^2)}{1+x^2}$，求这曲线的方程.

§2.3　恰当方程与积分因子

2.3.1　恰当方程

下面将一阶方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$写成微分形式

$$f(x,y)dx-dy=0,$$

或把x,y平等看待，写成下面具有对称形式的一阶微分方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (2.3.1).$$

这里假设$M(x,y),N(x,y)$在某矩形域内是x,y的连续函数，且具有连续的一阶偏导数.

如果方程

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (2.3.2)$$

的左端恰好是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，即

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv du(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2.3.3}$$

则称(2.3.1)为恰当方程.

容易验证,(2.3.1)的通解就是

$$u(x,y) = C. \tag{2.3.4}$$

这里 C 是任意常数.

这样,我们自然会提出如下问题:

(1) 如何判别(2.3.1)是恰当方程?

(2) 如果(2.3.1)是恰当方程,如何求得函数 $u = u(x,y)$?

为了回答以上问题,我们首先察看,如果(2.3.1)是恰当方程时,函数 $M(x,y)$, $N(x,y)$应该具有什么性质?

从(2.3.2)得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(2.3.4) \text{和} \frac{\partial u}{\partial y} = N. \tag{2.3.5}$$

将(2.3.4)、(2.3.5)分别对 y,x 求偏导数,得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial y}.$$

由于$\frac{\partial M}{\partial y}$,$\frac{\partial N}{\partial x}$的连续性,可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \text{即} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.3.6}$$

因此,(2.3.6)是(2.3.1)为恰当方程的必要条件.现在证明(2.3.6)也是(2.3.1)为恰当方程的充分条件,或更进一步证明:如果方程(2.3.1)满足条件(2.3.6),我们能找到函数,使它同时适合方程(2.3.4)和(2.3.5).

接下来从关系式(2.3.2)出发,把 y 看作参数,解这个方程,得到

$$u = \int M(x,y)dx + \varphi(y), \tag{2.3.7}$$

这里 $\varphi(y)$是 y 的任意可微函数.我们现在来选择 $\varphi(y)$,使 u 同时满足(2.3.5),即

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{d\varphi(y)}{dy} = N.$$

由此

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx, \tag{2.3.8}$$

下面证明(2.3.8)的右端与 x 无关.为此只需证明(2.3.8)的右端对 x 的偏导数恒等于零.事实上,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]$$
$$=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right]=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\equiv 0.$$

由于在假设条件下,上述交换求导的顺序是允许的.于是(2.3.8)右端的确只含有y,积分之,得到

$$\varphi(y)=\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy, \tag{2.3.9}$$

将(2.3.8)代入(2.3.7),即求得

$$u=\int M(x,y)dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy.$$

因此,恰当方程(2.3.1)的通解就是

$$\int M(x,y)dx+\int\left[N-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy=C. \tag{2.3.10}$$

这里C是任意常数.

例 2.3.1　求$(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$的通解.

解　这里,$M=3x^2+6xy^2$,$N=6x^2y+4y^3$,

这时

$$\frac{\partial M}{\partial y}=12xy,\frac{\partial N}{\partial x}=12xy,$$

因此方程是恰当方程.

现在求u,使它同时满足如下两个方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2 \tag{2.3.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3 \tag{2.3.12}$$

由(2.3.11)对x积分,得到

$$u=x^3+3x^2y^2+\varphi(y), \tag{2.3.13}$$

为了确定$\varphi(y)$,将(2.3.13)对y求导数,并使它满足(2.3.12),即得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+\frac{d\varphi(y)}{dy}=6x^2y+4y^3,$$

于是

$$\frac{d\varphi(y)}{dy}=4y^3.$$

积分后可得

$$\varphi(y)=y^4,$$

将 $\varphi(y)$ 代入(2.3.11),得到

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4.$$

因此,方程的通解为

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

这里 C 是任意常数.

不过在判断方程是恰当方程后,并不需要按照上述一般方法来求解,而是采取"分项组合"的办法,先把那些本身已构成全微分的项分出,再把剩下的项凑成全微分. 这种方法要求熟记一些简单二元函数的全微分.

例 2.3.2 用"分项组合"的办法,求解例 2.3.1.

解 把方程重新"分项组合",得到

$$3x^2dx + 4y^3dy + 6xy^2dx + 6x^2ydy = 0,$$

即

$$dx^3 + dy^4 + 3y^2dx^2 + 3x^2dy^2 = 0,$$

或者写成

$$d(x^3 + y^4 + 3x^2y^2) = 0.$$

于是方程的通解为

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C.$$

这里 C 是任意常数.

例 2.3.3 求解方程 $\left(\sin x + \dfrac{2}{y}\right)dx + \left(\dfrac{3}{y} - \dfrac{2x}{y^2}\right)dy = 0.$

解 因为

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2}{y^2}, \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2}{y^2},$$

故方程是恰当方程. 把方程重新"分项组合",得到

$$\sin x dx + \frac{3}{y}dy + 2\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy\right) = 0,$$

即

$$d\cos x + 3d\ln|y| + \frac{2(ydx - xdy)}{y^2} = 0,$$

或者写成

$$d\left(-\cos x + 3\ln|y| + \frac{2x}{y}\right) = 0,$$

于是,方程的通解为

$$-\cos x + 3\ln|y| + \frac{2x}{y} = C.$$

这里 C 是任意常数.

2.3.2 积分因子

恰当方程可以通过积分求出它的通解.因此,能否将一个非恰当方程化为恰当方程就有很大的意义.积分因子就是为了解决这个问题而引进的概念.根据一阶微分的形式不变性,易见变量代换法在这里是无能为力的.但是分离变量法却可以推广而成为对方程(2.3.1)能够适用的积分因子法.

定义 2.5 如果存在连续可微的函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$,使得

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

为一恰当方程,即存在函数 ν,使

$$\mu Mdx+\mu Ndy\equiv d\nu. \tag{2.3.14}$$

则称 $\mu(x,y)$ 为方程(2.3.1)的积分因子.

这时 $\nu(x,y)=C$ 是(2.3.14)的通解,因而也就是(2.3.1)的通解.由(2.3.14)看到,同一方程 $ydx-xdy=0$.可以有不同的积分因子 $\frac{1}{x^2},\frac{1}{y^2},\frac{1}{xy},\frac{1}{x^2\pm y^2}$.可以证明,只要方程有解存在,则必有积分因子存在,并且不是唯一的.因此,在具体解题过程中,由于求出的积分因子不同,从而通解可能具有不同的形式.

根据(2.3.1),函数 $\mu(x,y)$ 为(2.3.1)的积分因子的充要条件是:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

即

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu. \tag{2.3.15}$$

这是一个以 μ 为未知函数的一阶线性偏微分方程.对于一般的一次连续可微函数 $M(x,y)$,$N(x,y)$,虽然可证(2.3.15)的解 $\mu(x,y)$ 一定存在,但要找出 $\mu(x,y)$ 的表达式却不一定能办到.下面介绍几种常用的求积分因子的简便方法.

(一)当 M,N 满足一定的条件时,(2.3.15)可化为常微分方程而求得其解.例如,对于方(2.3.1),如果存在只与 x 有关的积分因子 $\mu=\mu(x)$,则这时方程(2.3.15)变成

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0.$$

这时方程(2.3.15)变成

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu,$$

即

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx. \tag{2.3.16}$$

由此可知,方程(2.3.1)有只与 x 有关的积分因子的充要条件是:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(y) \tag{2.3.17}$$

这里 $\psi(y)$ 仅为 x 的函数.假设条件(2.3.17)成立,则根据方程(2.3.16),可以求得方程(2.3.1)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\psi(y)\mathrm{d}x} \tag{2.3.18}$$

同样,(2.3.1)有只与 y 有关的积分因子的充要条件是:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(x)$$

这里 $\varphi(x)$ 仅为 y 的函数.从而求得方程(2.3.1)的一个积分因子

$$\mu=e^{\int\rho(x)dx}$$

例 2.3.4　试用积分因子法解线性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x). \tag{2.2.1}$$

解　把方程改写为

$$[P(x)y+Q(x)]dx-dy=0, \tag{2.3.19}$$

这时,$M=P(x)y+Q(x)$,$N=-1$ 算得

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=-P(x),$$

因而,线性方程有只与 x 有关的积分因子

$$\mu=e^{-\int P(x)dx}.$$

以 $\mu=e^{\int P(x)dx}$ 乘(2.3.18)得到

$$P(x)e^{-\int P(x)dx}ydx-e^{-\int P(x)dx}dy+Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

即

$$yde^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}dy-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0,$$

或者写成

$$d(ye^{-\int P(x)dx})-Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=0.$$

因此,(2.3.19)的通解为

$$ye^{-\int P(x)dx}-\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx=C.$$

或者改写为

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right).$$

这与前面得到的结果(2.2.7)完全一样.

（二）分组求积分因子法

设将方程(2.3.1)的左端分成两组,即写成：

$$(M_1dx+N_1dy)+(M_2dx+N_2dy)=0,$$

并已找出两组分别各有积分因子 μ_1,μ_2,使得：

$$\mu_1(M_1dx+N_1dy)=dU_1,\mu_2(M_2dx+N_2dy)=dU_2.$$

设 $\varphi_1(U_1),\varphi_2(U_2)$分别是 U_1,U_2 的任意可微函数,则 $\mu_1\varphi_1(U_1)$是第一组的积分因子,$\mu_2\varphi_2(U_2)$是第二组的积分因子.

如果能找到适当的可微函数 φ_1,φ_2,使得

$$\mu_1\varphi_1(U_1)=\mu_2\varphi_2(U_2)=\mu,$$

那么,μ 也就是原方程(2.3.1)的积分因子了.

例 2.3.5　求解方程 $y^3dx+2(x^2-xy^2)dy=0$.

解　把方程改写为

$$(y^3dx-2xy^2dy)+2x^2dy=0,$$

前一组有积分因子 $x^{-\frac{5}{2}}$ 和通积分 $y^3x^{-\frac{3}{2}}=C$,因而它有更一般的积分因子 $x^{-\frac{5}{2}}\varphi_1(y^3x^{-\frac{3}{2}})$.

后面一组显见有积分因子$\frac{1}{x^2}$和通积分 $y=C$,因而有更一般的积分因子$\frac{1}{x^2}\varphi_2(y)$.

为了使关系式 $x^{-\frac{5}{2}}\varphi_1(y^3x^{-\frac{3}{2}})=\frac{1}{x^2}\varphi_2(y)$成立,只须取

$$\varphi_1(y^3x^{-\frac{3}{2}})=(y^3x^{-\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}=y^{-1}x^{\frac{1}{2}},\varphi_2(y)=\frac{1}{y},$$

这样,可知原方程有积分因子$\frac{1}{x^2y}$,且：

$$\frac{1}{x^2y}[y^3dx+2(x^2-xy^2)dy]=\frac{y^2dx-2xydy}{x^2}+\frac{2}{y}dy$$

$$=-d\left(\frac{y^2}{x}\right)+2d(\ln|y|)=0,$$

积分,即得：

$$2\ln|y|-\frac{y^2}{x}=C.$$

这里 C 为任意常数.

此外，原方程还有解 $x=0$ 和 $y=0$，它们是在用 $\frac{1}{x^2y}$ 乘方程的两端时丢掉的.

（三）观察法

为此，需要熟记像(2.3.14)中的那些微分公式.

例 2.3.6　求解方程

1) $xdy-ydx=0$；　　　2) $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

解　1) 不难看出，方程有积分因子 $\frac{1}{x^2}$，因为：

$$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right),$$

由此积分，立刻得到方程的通积分为：

$$y=Cx,$$

这里 C 为任意常数.

2) 不难看出，方程有积分因子 $\frac{1}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{(xdx+ydy)+(xdy-ydx)}{x^2+y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)+d\arctan\frac{y}{x},$$

由此积分，立刻得到方程的通积分为：

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)-\arctan\frac{y}{x}=C,$$

这里 C 为任意常数.

例 2.3.7　求解方程 $ydx+(y-x)dy=0$.

解　这里 $M=y,N=y-x,\frac{\partial M}{\partial y}=1,\frac{\partial N}{\partial x}=-1$. 方程不是恰当方程.

方法 1　因为 $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=-\frac{2}{y}$ 只与 y 有关，故方程有只与 y 有关的积分因子

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{y}\right)dy}=e^{-2\ln|y|}=\frac{1}{y^2},$$

以 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 乘方程两边，得到

$$\frac{1}{y}dx+\frac{1}{y}dy-\frac{xdy}{y^2}=0,$$

或者写成

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}+\frac{dy}{y}=0,$$

因而，通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

这里 C 为任意常数.

方法 2　将方程改写为

$$ydx-xdy=-ydy,$$

则左端有积分因子 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 或 $\mu=\frac{1}{x^2}$,…,但考虑到右端只与 y 有关,

故取 $\mu=\frac{1}{y^2}$ 为方程的积分因子,由此得到

$$\frac{ydx-xdy}{y^2}=-\frac{dy}{y},$$

因此,方程的通解为

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

这里 C 为任意常数.

方法 3　方程可以写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y},$$

这是齐次方程,令 $\frac{y}{x}=u$,代入得到

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u}{1-u},$$

分离变量,得

$$\frac{1-u}{u^2}du=\frac{dx}{x},$$

因此,通解为

$$-\frac{1}{u}-\ln|u|=\ln|x|-C,$$

代回原来的变量,即得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

这里 C 为任意常数.

方法 4　把 x 看作未知变量,y 看作自变量,方程变为线性方程

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-1,$$

同样解得

$$\frac{x}{y}+\ln|y|=C.$$

这里 C 为任意常数.此外,易见 $y=0$ 也是原方程的解.

习题　2.3

1.解下列方程

(1) $\left[\frac{y^2}{(x-y)^2}-\frac{1}{x}\right]dx+\left[\frac{1}{y}-\frac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0.$

(2) $\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$

(3) $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0.$

(4) $\left(xy^2+\frac{2}{3}x^3\right)dx+\left(x^2y+\frac{1}{3}y^2\right)dy=0.$

(5) $\left(\frac{y}{x^2+y^2}+y\right)dx+\left(x-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0.$

(6) $\left(\frac{1}{y}+\frac{2y}{x^2-y^2}\right)dx+\left(\frac{x}{y^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}\right)dy=0.$

2.解下列微分方程

(1) $(x^3y+2x^2)dx+4(xy^4+2y^3)dy=0.$

(2) $ydx-xdy=(x^2+y^2)dx.$

(3) $(x+2y)dx+xdy=0.$

(4) $(e^x+3y^2)dx+2xydy=0.$

(5) $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0.$

(6) $(y+2x^2)dx+(x+8y^3)dy=0.$

§2.4　一阶隐方程与参数表示

一阶隐微分方程的一般形式可表示为:$F(x,y,y')=0.$

如果能从此方程中解出导数 y',其表达式为 $y'=f(x,y)$,则可依 $f(x,y)$ 的具体形状如何而选择前面所讲的某一方法进行求解.但如果难以从方程中解出 y',或即使解出 y',而其表达式相当复杂的情况下,则宜采用引进参数的办法使之变为导数已解出的方程的类型,这正是本节讨论的主要思想.

这里主要介绍以下四种类型：

1) $y=f(x,y')$；　　2) $x=f(y,y')$；

3) $F(x,y')=0$；　　4) $F(y,y')=0$.

2.4.1　可以解出 y(或 x) 的方程

(一) 讨论形如

$$y=f\left(x,\frac{dy}{dx}\right) \tag{2.4.1}$$

的方程的解法，这里假设函数 $f\left(x,\dfrac{dy}{dx}\right)$有连续的偏导数.

引进参数$\dfrac{dy}{dx}=p$，则(2.4.1)变为

$$y=f(x,p), \tag{2.4.2}$$

将(2.4.2)两边对 x 求导数，并以$\dfrac{dy}{dx}=p$ 代入，得到

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{2.4.3}$$

方程(2.4.3)是关于 x,p 的一阶微分方程，但它的导数已解出，于是我们可以按前面讲的方法求出它的解.

下面分三种情形进行讨论：

1. 若已求得(2.4.3)的通解形式为 $p=\varphi(x,C)$，将它代入(2.4.2)，得到 $y=f(x,\varphi(x,C))$，这就是(2.4.1)的通解.

2. 若求得(2.4.3)的通解形式为 $x=\psi(p,C)$，则得到(2.4.1)的参数形式的通解为

$$\begin{cases}x=\psi(p,C)\\ y=f(\psi(p,C),p)\end{cases}$$

其中 p 是参数，C 是任意常数.

3. 若求得(2.4.3)的通解形式为 $\varphi(x,p,C)$，则得到(2.4.1)的参数形式的通解为

$$\begin{cases}\varphi(x,p,C)=0\\ y=f(x,p)\end{cases}$$

其中 p 是参数，C 是任意常数.

例 2.4.1　求方程的解 $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2}{2}$.

解　令$\dfrac{dy}{dx}=p$，则