目　　录

第 6 章　数列 …………………………………………………… (1)
6.1　数列的概念 ………………………………………………… (1)
6.1.1　数列的基本概念 …………………………………………… (1)
6.1.2　数列的通项公式 …………………………………………… (2)
6.2　等差数列 …………………………………………………… (4)
6.2.1　等差数列的概念 …………………………………………… (4)
6.2.2　等差数列的通项公式 ……………………………………… (5)
6.2.3　等差数列的前 n 项和 ……………………………………… (6)
6.3　等比数列 …………………………………………………… (8)
6.3.1　等比数列的概念 …………………………………………… (8)
6.3.2　等比数列的通项公式 ……………………………………… (9)
6.3.3　等比数列的前 n 项和 ……………………………………… (11)
6.4　数列实际应用举例 ………………………………………… (13)
知识天地 ……………………………………………………… (17)
第 7 章　平面向量 ……………………………………………… (18)
7.1　平面向量的概念 …………………………………………… (18)
7.2　平面向量的运算 …………………………………………… (21)
7.2.1　平面向量的加法 …………………………………………… (21)
7.2.2　平面向量的减法 …………………………………………… (22)
7.2.3　平面向量的数乘运算 ……………………………………… (23)
7.3　平面向量的坐标表示 ……………………………………… (26)
7.3.1　平面向量坐标表示 ………………………………………… (26)
7.3.2　平面向量共线 ……………………………………………… (28)
7.4　平面向量的内积 …………………………………………… (30)
7.4.1　平面向量内积的概念和运算 ……………………………… (30)

7.4.2 向量内积的坐标表示 …… (32)

第 8 章 直线和圆的方程 …… (36)

8.1 两点间距离公式及中点公式 …… (36)

8.1.1 两点间的距离公式 …… (36)

8.1.2 线段中点坐标公式 …… (37)

8.2 直线的方程 …… (39)

8.2.1 直线的倾斜角与斜率 …… (39)

8.2.2 直线的点斜式和斜截式方程 …… (41)

8.2.3 直线的一般式方程 …… (44)

8.3 两条直线的位置关系 …… (46)

8.3.1 两条相交直线的交点 …… (46)

8.3.2 两条直线平行的条件 …… (47)

8.3.3 两条直线垂直的条件 …… (49)

8.4 点到直线的距离 …… (51)

8.5 圆的方程 …… (53)

8.5.1 圆的标准方程 …… (53)

8.5.2 圆的一般方程 …… (54)

8.6 直线与圆 …… (57)

8.6.1 直线与圆的位置关系 …… (57)

8.6.2 直线的方程与圆的方程应用举例 …… (59)

知识天地 …… (64)

第 9 章 立体几何 …… (67)

9.1 平面的基本性质 …… (67)

9.1.1 平面的表示 …… (67)

9.1.2 平面的三条基本性质 …… (68)

9.2 直线与直线、直线与平面、平面与平面平行的判定与性质 …… (71)

9.2.1 直线与直线平行 …… (71)

9.2.2 直线与平面平行 …… (73)

9.2.3 平面与平面平行 …… (75)

9.3 直线与直线、直线与平面、平面与平面垂直的判定与性质 …… (79)

9.3.1 直线与直线垂直的判定与性质 …… (79)

9.3.2 直线与平面垂直的判定与性质 …… (81)

9.3.3 平面与平面垂直的判定与性质 …………………………………… (84)
9.4 空间几何体 ……………………………………………………………… (88)
9.4.1 棱柱、棱锥与棱台 ………………………………………………… (88)
9.4.2 圆柱、圆锥与球 …………………………………………………… (93)
知识天地 ………………………………………………………………… (102)
第 10 章 概率与统计初步 ……………………………………………… (104)
10.1 计数原理 …………………………………………………………… (104)
10.2 概率 ………………………………………………………………… (107)
10.2.1 随机事件 ………………………………………………………… (107)
10.2.2 频率与概率 ……………………………………………………… (110)
10.2.3 概率的简单性质 ………………………………………………… (111)
10.3 直方图与频率分布 ………………………………………………… (114)
10.4 总体、样本与抽样方法 …………………………………………… (118)
10.4.1 总体与样本 ……………………………………………………… (118)
10.4.2 抽样方法 ………………………………………………………… (119)
10.5 用样本估计总体 …………………………………………………… (122)
10.5.1 用样本均值估计总体均值 ……………………………………… (122)
10.5.2 用样本标准差估计总体标准差 ………………………………… (123)
10.6 一元线性回归 ……………………………………………………… (127)
知识天地 ………………………………………………………………… (136)

第 6 章　数列

6.1　数列的概念

6.1.1　数列的基本概念

将正整数从小到大排成一列数为：

$$1,2,3,4,5,\cdots.$$

将 2 的正整数指数幂从小到大排成一列数为：

$$2,2^2,2^3,2^4,2^5,\cdots.$$

当 n 从小到大依次取正整数时，$\cos n\pi$ 的值排成一列数为：

$$-1,1,-1,1,\cdots.$$

取无理数 π 的近似值(四舍五入法)，依照有效数字的个数，排成一列数为：

$$3,3.1,3.14,3.141,3.1416,\cdots.$$

想一想：

上面的 4 个数列中，哪些是有穷数列，哪些是无穷数列？

像上面的实例那样，按照一定的次序排成的一列数叫作数列. 数列中的每一个数叫作数列的项. 从开始的项起，按照自左至右的排序，各项按照其位置依次叫作这个数列的第 1 项(或首项)，第 2 项，第 3 项，……，第 n 项，其中反映各项在数列中位置的数字 $1,2,3,\cdots,n$，分别叫作对应的项的项数.

学习提示：

数列的“项”与这一项的“项数”是两个不同的概念. 如第二个例子中，第 3 项为 2^3，这一项的项数为 3.

只有有限项的数列叫作有穷数列，有无限多项的数列叫作无穷数列.

练一练

1. 说出生活中的一个数列实例.
2. 数列“1,2,3,4,5”与数列“5,4,3,2,1”是否为同一个数列?
3. 设数列$\{a_n\}$为“$-5,-3,-1,1,3,5,\cdots$”,指出其中a_3,a_6各是什么数?

6.1.2 数列的通项公式

由于从数列的第一项开始,各项的项数依次与正整数相对应,所以无穷数列的一般形式可以写作:

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n.(n\in\mathbf{N}^*).$$

简记作$\{a_n\}$.其中,下角码中的数为项数,a_1表示第1项,a_2表示第2项,…….当n由小至大依次取正整数值时,a_n依次可以表示数列中的各项.因此,通常把第n项a_n叫作数列$\{a_n\}$的通项或一般项.

如果数列$\{a_n\}$的第n项a_n与n之间的关系可以用一个公式来表示,那么这个公式就叫作这个数列的通项公式.

关于通项公式需要注意以下三点:

(1) 并不是所有数列都能写出其通项公式;

(2) 一个数列的通项公式有时是不唯一的,如数列:1,0,1,0,1,0,… 它的通项公式可以是$a_n=\dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$,也可以是$a_n=\cos\dfrac{n+1}{2}\pi$;

(3) 数列通项公式的作用:① 求数列中任意一项;② 检验某数是否是该数列中的一项.

数列的通项公式具有双重身份,它既表示了数列的第n项,又是这个数列中所有各项的一般表示.通项公式反映了一个数列项与项数的函数关系,只要给了数列的通项公式,这个数列便确定了,代入项数就可求出数列的每一项.

例 1 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式,写出前5项:

(1)$a_n=\dfrac{n}{n+1}$; (2)$a_n=(-1)^n\cdot n$.

分析 由通项公式定义可知,只要将通项公式中n依次取1,2,3,4,5,即可得到数列的前5项.

解 (1) 当$n=1,2,3,4,5$时,可以得:

$$a_1=\frac{1}{2};a_2=\frac{2}{3};a_3=\frac{3}{4};a_4=\frac{4}{5};a_5=\frac{5}{6}.$$

(2) 当 $n=1,2,3,4,5$ 时,可以得:

$$a_1=-1;a_2=2;a_3=-3;a_4=4;a_5=-5.$$

例 2　根据下面数列的前几项的值,写出数列的一个.通项公式:

(1)3,5,9,17,33,…;　　(2) $\frac{2}{3},\frac{4}{15},\frac{6}{35},\frac{8}{63},\frac{10}{99},\cdots$;

(3)0,1,0,1,0,1,…;　　(4)1,3,3,5,5,7,7,9,9,…;

(5)2,−6,12,−20,30,−42,….

解　(1)$a_n=2n+1$;

(2)$a_n=\dfrac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3)$a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

(4) 将数列变形为 $1+0,2+1,3+0,4+1,5+0,6+1,7+0,8+1,\cdots$.

$\therefore a_n=n+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

(5) 将数列变形为 $1\times2,-2\times3,3\times4,-4\times5,5\times6,\cdots$.

$\therefore a_n=(-1)^{n+1}n(n+1)$.

练一练

1.根据下列各数列的通项公式,写出数列的前 4 项:

(1)$a_n=3^n-2$;　　(2)$a_n=(-2)^n\cdot n$.

2.根据下列各无穷数列的前 4 项,写出数列的一个通项公式:

(1)5,10,15,20,…;

(2) $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8}\cdots$;

(3)−1,1,−1,1,….

习题 6.1

1.设数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$,写出数列的前 5 项.

2.根据下列各无穷数列的前 4 项,写出数列的一个通项公式:

(1) $-1,1,3,5,\cdots$；

(2) $-\frac{1}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{9},\frac{1}{12},\cdots$；

(3) $\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{5}{6},\frac{7}{8},\cdots$.

3. 判断 12 和 56 是否为数列$\{n^2-n\}$中的项，如果是，请指出是第几项.

6.2 等差数列

6.2.1 等差数列的概念

将正整数中 5 的倍数从小到大列出，组成数列 1：

$$5,10,15,20,\cdots.$$

将正奇数从小到大列出，组成数列 2：

$$1,3,5,7,9,\cdots.$$

观察数列中相邻两项之间的关系，发现：从第 2 项开始，数列 1 中的每一项与它前一项的差都是 5；数列 2 中的每一项与它前一项的差都是 2. 这两个数列的一个共同特点就是从第 2 项开始，数列中的每一项与它前一项的差都等于相同的常数.

如果一个数列从第 2 项开始，每一项与它前一项的差都等于同一个常数，那么，这个数列就叫作等差数列. 这个常数叫作等差数列的公差，一般用字母 d 表示.

由定义知，若数列$\{a_n\}$为等差数列，d 为公差，则 $a_{n+1}-a_n=d$，即：

$$a_{n+1}=a_n+d. \tag{6-1}$$

学习提示：

等差数列的通项公式的推导过程实际上是一个无限次迭代的过程，所用的归纳方法是不完全归纳法. 因此，公式的正确性还应该用数学归纳法加以证明.

练一练

1. 判断下列数列中哪个是等差数列，哪个不是. 如果是，写出公差 d；如果不是，说明理由.

(1) $1,1,1,1,\cdots$；

(2) $4,7,10,13,16,\cdots$.

学习提示：

判断一个数列是不是等差数列，主要是由定义判断每一项(从第 2 项起)与它的前一项的差是不是同一个常数，而且公差可以是正数，负数，也可以为 0.

2. 已知$\{a_n\}$为等差数列，$a_5=-8$，公差 $d=2$，试写出这个数列的第 8 项 a_8.

6.2.2　等差数列的通项公式

同学们能很快地写出一个数列的第 1001 项吗?

显然，依照公式(6-1)写出数列的第 1001 项是比较麻烦的，但是，如果求出数列的通项公式，就可以方便地直接求出数列的第 1001 项.

因此，设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，则：

$$a_1=a_1,$$
$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots$$

依此类推，通过观察可以得到等差数列的通项公式：

$$a_n=a_1+(n-1)d. \tag{6-2}$$

知道了等差数列$\{a_n\}$中的 a_1 和 d，利用公式(6-2)，可以直接计算出数列的任意一项.

想一想：

等差数列的通项公式中，共有四个量：a_n，a_1，n 和 d，只要知道了其中的任意三个量，就可以求出另外的一个量. 针对不同情况，应该分别采用什么样的计算方法?

例 1　(1)求等差数列 8，5，2… 的第 20 项；

(2)-401 是不是等差数列 -5，-9，-13… 的项? 如果是，是第几项?

解　(1)由 $a_1=8$，$d=5-8=2-5=-3$，$n=20$，得：

$$a_{20}=8+(20-1)\times(-3)=-49.$$

(2)由 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$.

得数列通项公式为：

$$a_n = -5 - 4(n-1).$$

由题意可知,本题是要回答是否存在正整数 n,使得 $-401 = -5 - 4(n-1)$ 成立.解之得 $n = 100$,即 -401 是这个数列的第 100 项.

例 2 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_{100} = 48$,公差 $d = \frac{1}{3}$,求首项 a_1.

解 由于公差 $d = \frac{1}{3}$,故设等差数列的通项公式为:

$$a_n = a_1 + (n-1)\frac{1}{3}.$$

由于 $a_{100} = 48$,故:

$$48 = a_1 + (100-1)\frac{1}{3},$$

解得:

$$a_1 = 15.$$

学习提示:

本题目初看是知道 2 个条件,实际上是 3 个条件:$n = 100$,$a_n = 48$,$d = \frac{1}{3}$.

练一练

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_5 = 10$,$a_{12} = 31$,求 a_1,d,a_{20},a_n.
2. 求等差数列 $\frac{1}{5}, 1, \frac{8}{5}, \cdots$ 的通项公式与第 15 项.
3. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_5 = -3$,$a_9 = -15$,判断 -48 是否为数列中的项,如果是,请指出是第几项.
4. 求等差数列 $-1, 5, 11, 17, \cdots$ 的第 50 项.

6.2.3 等差数列的前 n 项和

高斯是伟大的数学家和天文学家,高斯十岁时,有一次老师出了一道题目,老师说:"现在给大家出道题目:

$$1 + 2 + \cdots + 100 = ?$$ "

过了两分钟,正当大家在:$1+2=3$;$3+3=6$;$4+6=10$… 算得不亦乐乎时,高斯站起来回答说:

"$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = 5050$."

教师问:“你是如何算出答案的?”

高斯回答说:“因为 $1+100=101$;$2+99=101$;…$50+51=101$,所以:

$$101\times 50=5050”.$$

这个故事告诉了我们求等差数列前 n 项和的一种很重要的思想方法,这就是下面我们要介绍的“倒序相加法”.

1. 等差数列的前 n 项和的公式 1:$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

证明:利用倒序相加法进行证明

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n, \qquad ①$$

$$S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1. \qquad ②$$

①+② 得:$2S_n=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\cdots+(a_n+a_n)$.

$\because a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$

$\therefore 2S_n=n(a_1+a_n)$,由此得:

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}. \tag{6-3}$$

2. 等差数列的前 n 项和的公式 2:$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$

用上述公式要求 S_n 必须具备三个条件:n,a_1,a_n.

但 $a_n=a_1+(n-1)d$,代入公式(6-3)即得:

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}. \tag{6-4}$$

此公式要求 S_n 必须已知三个条件:n,a_1,d. 总之,两个公式都表明要求 S_n 必须已知 n,a_1,d,a_n 中的三个.

公式又可化成式子:

$$S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n,$$

当 $d\neq 0$ 时,S_n 是一个常数项为零的二次式.

例 2　等差数列 $-10,-6,-2,2,\cdots$ 前多少项的和是 54?

解　设题中的等差数列为 $\{a_n\}$,前 n 项为 S_n 则:

$$a_1=-10, d=(-6)-(-10)=4, S_n=54.$$

由公式可得:

$$-10n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=54.$$

解得:

$$n_1=9, n_2=-3(\text{舍去}).$$

所以等差数列 $-10,-6,-2,2\cdots$ 前 9 项的和是 54.

练一练

1. 根据题中条件,求相应的等差数列的前 n 项和的表达式:$a_1=4$,$a_8=-18$,$n=8$.
2. 求集合 $M=\{m \mid m=7n, n\in \mathbf{N}^* \text{ 且 } m<100\}$ 的元素个数,并求这些元素的和.

习题 6.2

1. 已知一个等差数列的前 10 项的和是 310,前 20 项的和是 1220,求其前 n 项和的公式.
2. 在小于 100 的正整数中共有多少个数能被 3 除余 2,并求这些数的和.
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,S_n 是其前 n 项和,求证:

   (1) $S_6, S_{12}-S_6, S_{18}-S_{12}$ 成等差数列;

   (2) $S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k}(k\in \mathbf{N}^*)$ 成等差数列.
4. 一个凸 n 边形各内角的度数成等差数列,公差是 $10°$,最小内角为 $100°$,求边数 n.

6.3 等比数列

6.3.1 等比数列的概念

某工厂今年的产值是1000万元,如果通过技术改造,在今后的5年内,每年的产值都比上一年增加10%,那么今年及以后5年的产值构成下面的一个数列(单位:万元):

$1000, 1000\times1.1, 1000\times1.1^2, 1000\times1.1^3, 1000\times1.1^4, 1000\times1.1^5$.

不难发现,从第 2 项开始,数列中的各项都是其前一项的 1.1 倍,即从第 2 项开始,每一项与它的前一项的比都等于 1.1.

如果一个数列从第 2 项开始,每一项与它前一项的比都等于同一个常数,那么这个数列就叫作等比数列. 这个常数叫作这个等比数列的公比,一般用字母 q 来表示.

由定义知，若$\{a_n\}$为等比数列，q为公比，则a_1与q均不为零，且有$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，即：

$$a_{n+1}=a_n\cdot q. \tag{6-5}$$

例 1　在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=5$，$q=3$，求a_2，a_3，a_4，a_5.

解　根据公式(6-5)可得：

$$a_2=a_1\cdot q=5\times3=15,$$

$$a_3=a_2\cdot q=15\times3=45,$$

$$a_4=a_3\cdot q=45\times3=135,$$

$$a_5=a_4\cdot q=135\times3=405.$$

动手实践：

试着写出这个数列的第 19 项.

练一练

1. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=-6$，$q=2$. 试写出a_4，a_6.
2. 写出等比数列 3，−6，12，−24，… 的第 5 项与第 6 项.

6.3.2　等比数列的通项公式

与等差数列相类似，我们通过观察等比数列各项之间的关系，分析、探求其规律.

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则：

$$a_2=a_1q;$$

$$a_3=a_2q=(a_1q)q=a_1q^2;$$

$$a_4=a_3q=(a_1q^2)q=a_1q^3;$$

$$\cdots$$

$$a_n=a_{n-1}q=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq0).$$

依此类推，得到等比数列的通项公式：

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1}(a_1\cdot q\neq0). \tag{6-6}$$

知道了等比数列$\{a_n\}$中的a_1和q，利用公式(6-6)，可以直接计算出数列的任意一项.

想一想：

等比数列的通项公式中，共有四个量：a_n，a_1，n 和 q，只要知道了其中的任意三个量，就可以求出另外的一个量．针对不同情况，应该分别采用什么样的计算方法？

例 2　求下面等比数列的第 4 项与第 5 项：

(1)5，－15，45，…；

(2)1.2，2.4，4.8，…；

(3) $\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{8}$，…；

(4) $\sqrt{2}$，1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$，….

解　(1)$\because q=\frac{-15}{5}=-3$，$a_1=5$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=5\cdot(-3)^{n-1}$.

$\therefore a_4=5\cdot(-3)^3=-135$，$a_5=5\cdot(-3)^4=405$.

(2)$\because q=\frac{2.4}{1.2}=2$，$a_1=1.2$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=1.2\times2^{n-1}$.

$\therefore a_4=1.2\times2^3=9.6$，$a_5=1.2\times2^4=19.2$.

(3)$\because q=\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$，$a_1=\frac{2}{3}$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\frac{2}{3}\times(\frac{3}{4})^{n-1}$.

$\therefore a_4=\frac{2}{2}\times(\frac{3}{4})^3=\frac{9}{32}$，$a_5=\frac{2}{3}\times(\frac{3}{4})^4=\frac{27}{128}$.

(4)$\because q=1\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$a_1=\sqrt{2}$，$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=\sqrt{2}\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^{n-1}=\frac{1}{(\sqrt{2})^{n-2}}$.

$\therefore a_4=\frac{1}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{2}$，$a_5=\frac{1}{(\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

例 3　一个等比数列的第 9 项是$\frac{4}{9}$，公比是$-\frac{1}{3}$，求它的第 1 项.

解　由题意得 $a_9=\frac{4}{9}$，$q=-\frac{1}{3}$.

$\because a_9=a_1q^8$，$\therefore \frac{4}{9}=a_1(-\frac{1}{3})^8$，$\therefore a_1=2916$.

所以它的第 1 项为 2916.

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a,G,b 成等比数列，那么称这个数 G 为 a 与 b 的等比中项. 即：

$$G=\pm\sqrt{ab}\,(a,b\text{ 同号}).$$

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a,G,b 成等比数列，则：

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}\Rightarrow G^2=ab\Rightarrow G=\pm\sqrt{ab}.$$

反之，若 $G^2=ab$，则：

$$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}\text{，即 } a,G,b \text{ 成等比数列.}$$

$\therefore a,G,b$ 成等比数列 $\Leftrightarrow G^2=ab\,(a\cdot b\neq 0)$.

练一练

1. 一个等比数列的第 2 项是 10，第 3 项是 20，求它的第 1 项与第 4 项.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4=-1$，$a_7=-\frac{1}{8}$，求 a_{11}.

3. 已知：b 是 a 与 c 的等比中项，且 a,b,c 同号，求证：

$\frac{a+b+c}{3}$，$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$，$\sqrt[3]{abc}$ 也成等比数列.

6.3.3　等比数列的前 n 项和

例如，求数列 $1,2,4,\cdots 2^{62},2^{63}$ 的各项累加和，即求以 1 为首项，2 为公比的等比数列的前 64 项的和，可表示为：

$$S_{64}=1+2+4+8\cdots+2^{62}+2^{63}, \quad ①$$

$$2S_{64}=2+4+8+16\cdots+2^{63}+2^{64}. \quad ②$$

由 ② − ① 可得：

$$S_{64}=2^{64}-1$$

这种求和方法称为“错位相减法”. “错位相减法”是研究数列求和的一个重要方法.

因此得到等比数列的前 n 项和公式：

$\therefore$ 当 $q\neq 1$ 时：

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \qquad (6\text{-}7)$$

$$\text{或 } S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}; \qquad (6\text{-}8)$$

当 $q=1$ 时:

$$S_n=na_1.$$

学习提示:

已知 a_1,q,n 时用公式(6-7);已知 a_1,q,a_n 时,用公式(6-8).

例 4 求等比数列 1,2,4,… 从第 5 项到第 10 项的和.

解 由 $a_1=1,a_2=2$ 得 $q=2$.

$\therefore S_4=\dfrac{1\times(1-2^4)}{1-2}=15,S_{10}=\dfrac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1023.$

因此从第 5 项到第 10 项的和为 $S_{10}-S_4=1008$.

练一练

1. 已知$\{a_n\}$为等比数列,且 $S_n=a,S_{2n}=b,(ab\neq 0)$,求 S_{3n}.
2. $\{a_n\}$是等比数列,S_n 是其前 n 项和,数列 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k}(k\in \mathrm{N}^*)$是否仍成等比数列?

习题 6.3

1. 已知数列$\{a_n\}$是等比数列,S_n 是其前 n 项的和,求证:

$$S_7,S_{14}-S_7,S_{21}-S_{14} \text{ 成等比数列.}$$

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的第 2 项为 8,前 10 项的和为 185,从数列$\{a_n\}$中,依次取出第 2 项,第 4 项,第 8 项,…,第 2^n 项按原来的顺序排成一个新数列$\{b_n\}$,求数列$\{b_n\}$的通项公式和前项和公式 S_n.
3. 三个数成等比数列,若将第三数减去 32,则成等差数列,若将该等差数列中项减去 4,又成等比数列,求原三数.
4. 一个等比数列前 n 项的和为 $S_n=48$,前 $2n$ 项之和 $S_{2n}=60$,求 S_{3n}.

5. 在等比数列中，已知：$a_3=4$，$S_6=36$，求 a_n.

6.4　数列实际应用举例

数列在生活实践中有很多应用，下面将通过举例进行说明.

例 1　小明、小刚和小强进行钓鱼比赛，他们三人钓鱼的数量恰好组成一个等比数列. 已知他们三人一共钓了 14 条鱼，而每个人钓鱼数量的积为 64. 并且知道，小强钓的鱼最多，小明钓的鱼最少，问他们三人各钓了多少条鱼？

解　设小明、小刚和小强钓鱼的数量分别为$\frac{a}{q}$，a，aq. 则：

$$\begin{cases}\frac{a}{q}+a+aq+=14,\\ \frac{a}{q}.a.aq=64.\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}a=4,\\ q=2,\end{cases}\text{或}\begin{cases}a=4,\\ q=\frac{1}{2}.\end{cases}$$

当 $q=2$ 时：

$$\frac{a}{q}=\frac{4}{2}=2, aq=4\times 2=8.$$

此时三个人钓鱼的条数分别为 2，4，8.

当 $q=\frac{1}{2}$ 时：

$$\frac{a}{q}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8, aq=4\times\frac{1}{2}=2.$$

此时三个人钓鱼的条数分别为 8，4，2.

由于小明钓的鱼最少，小强钓的鱼最多，故小明钓了 2 条鱼，小刚钓了 4 条鱼，小强钓了 8 条鱼.

例 2　我校食品专业为了提高大家的专业水平，近期计划购买一批新机器，总价为 20 万元，以分期付款的方式购买. 由于食品专业向学校申请的是内部无息贷款，故还款时并不涉及利息问题. 学校给了两种付款方式：

第一种:首付款 15500 元,从第二年起每年比前一年多付 1000 元;

第二种:首付款 2 万元,从第二年起还款数额每年比上一年增加 20%.

(1) 第一种付款方式我们需要几年能够还清贷款?

(2) 第二种付款方式五年内食品专业总计还款多少万元?(参考数据:$1.2^5 \approx 2.488$)

解 (1) $a_1 = 1.55$ 万,$d = 0.1$,$S_n = 20$ 万,求 n.

由公式得:

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, 20 = 1.55n + \frac{n(n-1)}{2} \times 0.1.$$

整理得:$n^2 + 30n - 400 = 0$,解得:

$$n_1 = -40(\text{舍去}), n_2 = 10.$$

所以按这种方式还款需要 10 年还清贷款.

(2) 由题意,五年内食品专业每年付款依次为(单位:万元):

$2, 2(1+20\%), 2\times(1+20\%)^2, 2\times(1+20\%)^3, 2\times(1+20\%)^4$,$a_1 = 2$ 万,$q = 1+20\% = 1.2$,$n = 5$,求 S_n:

$$S_n = \frac{2(1-1.2^5)}{1-1.2} \approx 14.88.$$

所以五年内食品专业总计还款约为 14.88 万元.

习题 6.4

1. 有一个呈"V"型的铅笔堆,其最下面一层放一支铅笔,往上每一层都比它下面一层多放一支,最上面一层放 120 支,求这个 V 形架上共放着多少支铅笔?
2. 小明、小明的爸爸和小明的爷爷三个人的年龄恰好构成一个等差数列,他们三人的年龄之和为 120 岁,爷爷的年龄比小明年龄的 4 倍还多 5 岁,求他们祖孙三人的年龄.

复习题 6

A 组

1. 选择题：

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是等比数列，则这个数列的前 n 项和为（　　）

A. 0　　B. n

C. na_1　　D. a_1^n

(2) 等差数列 1，5，9，… 前 10 项的和是（　　）

A. 170　　B. 180

C. 190　　D. 200

(3) x，y，z 成等差数列且 $x+y+z=18$，则 $y=$（　　）

A. 6　　B. 8

C. 9　　D. 18

(4) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3a_n-2$，那么下面结论正确的是（　　）

A. 此数列为等差数列　　B. 此数列为等比数列

C. 此数列从第二项起是等比数列　　D. 此数列从第二项起是等差数列

(5) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=2\times 3^{n-1}$，则由此数列的偶数项所组成的新数列的前 n 项和 S_n 的值为（　　）

A. 3^n-1　　B. $3(3^n-1)$

C. $\dfrac{9^n-1}{4}$　　D. $\dfrac{3(9^n-1)}{4}$.

2. 填空题：

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^3$，则 $a_6+a_7+a_8=$__________.

(2) 三个数成等比数列，它们的积为 512，如果中间一个数加上 2，则成等差数列，这三个数是__________.

(3) 一个数列的前 n 项和为 $S_n=1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n+1}n$，则 $S_{17}+S_{33}+S_{50}=$__________.

3. 已知一个等差数列的第 5 项是 5，第 8 项是 14，求该数列的通项公式及第 20 项.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_5=10$，$a_{12}=13$，求首项 a_1 与公差 d.

5. 有四个数，其中前三个数成等差数列，后三个数成等比数列，并且第一个数与第四

个数的和是16,第二个数与第三个数的和是12,求这四个数.

B 组

1. 某城市1996年底人口为20万,人均住房面积大约为8m^2,计划到2000年底人均住房面积达到10m^2,如果该市人口平均增长率控制在1%,那么要实现上述计划,每年该市要平均新建住房面积多少万平方米?(结果以万平方米为单位,保留两位小数).
2. 在等比数列$\{a_n\}$中,$a_2=-\frac{1}{25}$,$a_5=-5$,判断-125是否为数列中的项,如果是,请指出是第几项.

知识天地

斐波那契

比萨的列奥纳多，又称斐波那契（Fibonacci，Leonardo Bigollo），中世纪意大利数学家，是西方第一个研究斐波那契数的人，并将现代书写数和乘数的位值表示法系统引入欧洲. 其写于 1202 年的著作《计算之书》（Liber Abaci）中包涵了许多希腊、埃及、阿拉伯、印度，甚至是中国数学的相关内容.

列奥纳多的父亲圭里亚莫（Guilielmo），外号 Bonacci. 因此，列奥纳多就得到了外号斐波那契（Fibonacci，意即 filius Bonacci，Bonacci 之子）. 圭里亚莫是商人，在北非一带工作（今阿尔及利亚 Bejaia），当时年轻的列奥纳多已经开始协助父亲工作，因此他学会了阿拉伯数字.

列奥纳多感觉使用阿拉伯数字比罗马数字更有效，因此他前往地中海一带向当时著名的阿拉伯数学家学习，并于 1200 年回国. 1202 年，27 岁的他将其所学写进《计算之书》. 这本书通过介绍记账、重量计算、利息、汇率和其他的应用，显示了新的数字系统的实用价值. 这本书在之后大大影响了欧洲人的思想，可是在三世纪后印制术发明之前，十进制数字并不流行.

斐波那契的旅居生活大概结束于 1200 年，之后返回他的家乡比萨，并开始和王室成员一起推广 0 ～ 9 这种十进制系统. 他在比萨著作颇丰，包括《计算之书》（1202）、《几何实践》（1220）、《花朵》（1225）、《平方数书》（1225）. 在那个年代，创作一本书是一项艰辛的工作，没有打字机，没有电脑，所有东西都只能手写. 因此，他的一些著作，比如关于商业运算和欧几里得《几何原本》的评述，没能流传下来，这是人类文明的一大损失. 有趣的是，斐波那契将数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 介绍给罗马的数学家们以后，他们花了 390 年时间争论“0”这个数字是否具有价值.